جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

@jove_iut

www.jozve-iut.ir

$$\Rightarrow \vec{\nabla} g(p) = \begin{pmatrix} \frac{f_u(p)}{z_0} \\ \frac{f_v(p)}{z_0} \\ \frac{-1}{z_0^2}(x_0 f_u + y_0 f_v) \end{pmatrix}$$

از طرفی توجه کنیم که

$$O(0,0,0) \in \Pi \Leftrightarrow \vec{OP} \perp \vec{\nabla} g(p) \Leftrightarrow \vec{OP} \cdot \vec{\nabla} g(p) = 0$$

$$OP = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{\nabla} g(p) = \frac{x_0 f_u}{z_0} + \frac{y_0 f_v}{z_0} - \frac{1}{z_0}(x_0 f_u + y_0 f_v) = 0$$

$\Rightarrow O \in \Pi$ (یعنی Π از مبدأ عبور می‌کند)

@jozve_iut

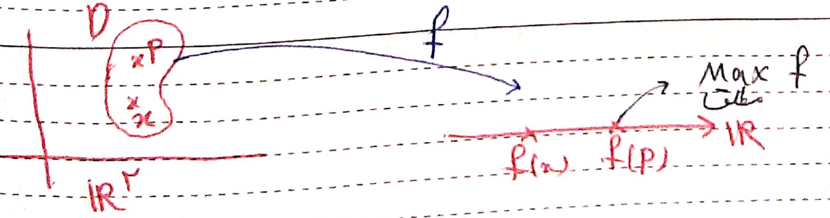
اکسترمم های توابع چند متغیره:

تعریف (اکسترمم های مطلق): فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^n$. در این صورت تابع $f: D \to \mathbb{R}$ را در نقطه $p \in D$ دارای یک

الف) ماکزیمم مطلق گوییم، هرگاه برای هر $x \in D$، $f(x) \le f(p)$

ب) مینیمم مطلق گوییم، هرگاه برای هر $x \in D$، $f(x) \ge f(p)$

ج) اکسترمم مطلق گوییم، هرگاه ماکزیمم یا مینیمم مطلق باشد.



@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

در این حالت گوییم $f(p)$ را ماکسیمم مطلق f می‌نامیم.

تعریف (اکسترمم‌های نسبی): فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^n$ و $p \in D$ یک نقطه درونی برای D باشد. در این صورت تابع $f: D \to \mathbb{R}$ را در نقطه p دارای یک

الف) ماکزیمم نسبی گوییم هرگاه برای هر x در یک همسایگی از p، $f(x) \leq f(p)$.

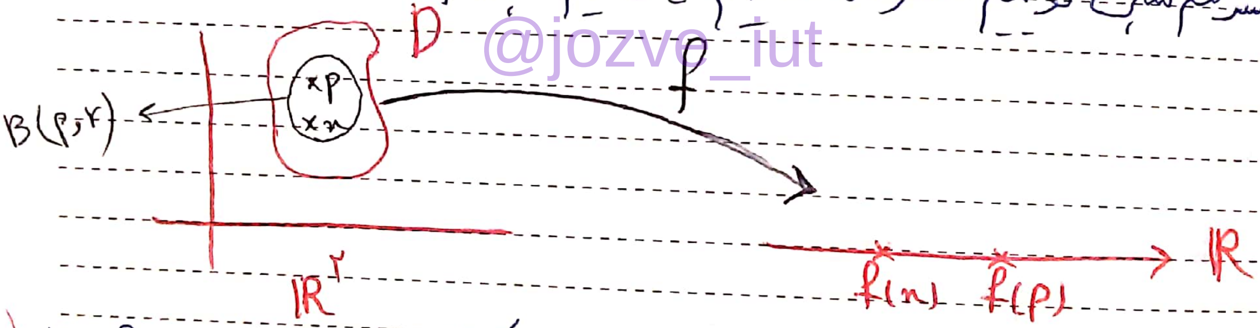
در این حالت $f(p)$ را ماکزیمم نسبی f می‌نامیم.

ب) مینیمم نسبی گوییم، هرگاه برای هر x در یک همسایگی از p، $f(x) \geq f(p)$

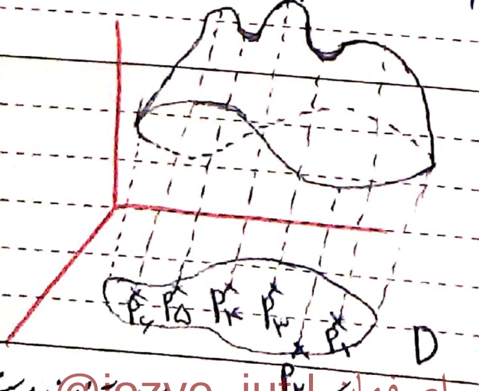
در این حالت $f(p)$ را مینیمم نسبی f می‌نامیم.

ج) اکسترمم نسبی گوییم، هرگاه ماکسیمم یا مینیمم نسبی باشد.

@jozve_iut



تذکر: با توجه به تعاریف فوق می‌توان نتیجه گرفت که اکسترمم‌های مطلق تابع f بر D در صورت وجود می‌توانند بر مرز D قرار داشته باشند در حالی که اکسترمم‌های نسبی f بر D در صورت وجود فقط در درون ناحیه D قرار دارند، بنابراین اکسترمم‌های مطلقی که در درون ناحیه D قرار دارند هم‌زمان اکسترمم نسبی نیز می‌باشند.



$D \subseteq \mathbb{R}^2$ $\quad f: D \to \mathbb{R}$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

f در نقاط p_1 و p_6 ماکزیمم نسبی دارد. f در نقطه p_4 ماکزیمم مطلق و نسبی دارد.

f در نقطه p_2 می‌نیمم مطلق دارد.

f در نقاط p_3 و p_5 می‌نیمم نسبی دارد.

قضیه: فرض کنیم $D\subseteq \mathbb{R}^n$ و تابع $f:D\to\mathbb{R}$ در نقطه درونی $p\in D$ دارای یک اکسترمم باشد. در این صورت یا f در p مشتق‌پذیر نیست و یا در صورت مشتق‌پذیری داریم:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)=\frac{\partial f}{\partial x_2}(p)=\dots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)=0 \iff \left(\vec{\nabla} f(p)=\vec{0}\right)$$

تعریف: فرض کنیم $D\subseteq \mathbb{R}^n$ و $p\in D$ یک نقطه درونی باشد. در این صورت نقطه p را یک نقطه بحرانی برای تابع f گوییم، هرگاه یا f در p مشتق‌پذیر نباشد یا در صورت مشتق‌پذیری

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(p)=\dots=\frac{\partial f}{\partial x_n}(p)=0$$

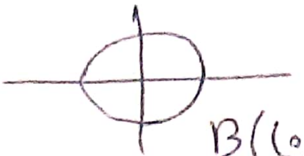
تذکر: با توجه به تعریف و قضیه‌ی فوق نتیجه می‌شود که

$$\{\text{اکسترمم‌های نسبی } f \text{ بر } D\}\subseteq\{\text{نقاط بحرانی } f \text{ بر } D\}$$

توجه کنیم که عکس رابطه بالا لزوماً درست نیست؛ یعنی هر نقطه بحرانی لزوماً یک اکسترمم نسبی نیست و چنین نقاط بحرانی را **نقاط زینی** می‌نامیم.

مثال: فرض کنیم $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ تابعی با ضابطه $f(x,y)=y^2-x^2$ باشد. در این صورت چون f تابعی مشتق‌پذیر است نقاط بحرانی آن، جواب دستگاه

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut



$B((0,0),r)$

معادلات زیر ما باشد

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Rightarrow (0,0)$$

تنها نقطه بحرانی f بر $\mathbb{R}^2$

برای هر $r>0$ همسایگی $B((0,0),r)$ را در نظر می‌گیریم

$\forall x\in(-r,r),\ x\neq 0 \quad (x,0)\in B((0,0),r)$

$\Rightarrow f(x,0)=-x^2<0=f(0,0)$ پس $(0,0)$ مینیمم نسبی نیست

$\forall y\in(-r,r),\ y\neq 0 \Rightarrow (0,y)\in B((0,0),r)$

$\Rightarrow f(0,y)=y^2>0=f(0,0)$ پس $(0,0)$ ماکزیمم نسبی نیست

@jozve_iut

پس $(0,0)$ نقطه‌ی زینی است

قضیه (آزمون مشتق دوم): فرض کنیم $D\subseteq\mathbb{R}^2$، $f: D\to\mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی مرتبه دوم پیوسته باشد. همچنین فرض کنیم $p\in D$ یک نقطه بحرانی برای f باشد. در این صورت قرار می‌دهیم

$A=f_{xx}(p)$, $B=f_{xy}(p)$

$C=f_{yy}(p)$, $D=AC-B^2$

الف) اگر $D>0$ و $A>0$ آنگاه f در نقطه p یک مینیمم نسبی دارد.

ب) اگر $D>0$ و $A<0$ آنگاه f در p یک ماکزیمم نسبی دارد

ج) اگر $D<0$، آنگاه f در p نقطه زینی دارد

د) اگر $D=0$ این آزمون بی‌نتیجه است

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$\lim_{(x,y)\to(+\infty,0)} f(x,y) = \lim_{x\to+\infty} f(x,0) = -\infty \Rightarrow$ min f مطلق ندارد

مثال) مطلوب است تعیین نقاط بحرانی و اکسترمم های نسبی تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x,y)=x(5-x^2-y^2+4y)$$

حل) با توجه به مشتق پذیری تابع فوق، نقاط بحرانی آن از طریق حل دستگاه زیر بدست می‌آید

$$f(x,y)=5x-x^3-xy^2+4xy$$

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f_x=5-3x^2-y^2+4y=0 & ☆ \\ f_y=-2xy+4x=0 \Longrightarrow x(-2y+4)=0 \Longrightarrow x=0 \text{ یا } y=2 & ☆☆ \end{cases}$$

(۱) $\begin{cases} x=0 \\ \text{و} \\ 5-3x^2-y^2+4y=0 \end{cases} \Longrightarrow 5-y^2+4y=0 \Longrightarrow y^2-4y-5=0 \Longrightarrow \begin{matrix} y=-1 \\ y=5 \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} P_1(0,-1) \\ P_2(0,5) \end{cases}$ نقاط بحرانی

(۲) $\begin{cases} y=2 \\ \text{و} \\ 5-3x^2-y^2+4y=0 \end{cases} \Longrightarrow x=\pm\sqrt{3} \Longrightarrow \begin{cases} P_3(\sqrt{3},2) \\ P_4(-\sqrt{3},2) \end{cases}$ نقاط بحرانی درون $\mathbb{R}^2$

$A=f_{xx}=-6x \quad B=f_{xy}=-2y+4 \quad C=f_{yy}=-2x \quad D=AC-B^2$

نقاط بحرانی	A	B	C	D	
$P_1(0,-1)$	0	6	0	-36	نقطه زینی
$P_2(0,5)$	0	-6	0	-36	نقطه زینی
$P_3(\sqrt{3},2)$	$-6\sqrt{3}$	0	$-2\sqrt{3}$	36	max نسبی
$P_4(-\sqrt{3},2)$	$6\sqrt{3}$	0	$2\sqrt{3}$	36	min نسبی

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
		۱	۲	۳	۴	۵
۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹
۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶
۲۷	۲۸	۲۹	۳۰			

مثال) مطلوب است تعیین نقاط بحرانی و اکسترمم های نسبی تابع $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x,y) = xy(1-x^2-y^2)$$

حل) تابع فوق چندجمله‌ای است پس مشتق‌پذیر است و نقاط بحرانی آن جواب دستگاه معادلات زیر است:

$$f(x,y) = xy - x^3y - y^3x \qquad \begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_x = y - 3x^2y - y^3 = 0 \\ f_y = x - x^3 - 3y^2x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 0 \ \text{یا}\ 3x^2+y^2=1 \\ x=0 \ \text{یا}\ x^2+3y^2=1 \end{cases}$$

(۱) $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow P_1(0,0)$ نقطه بحرانی

(۲) $\begin{cases} y=0 \\ x^2+3y^2=1 \end{cases} \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} P_2(1,0) \\ P_3(-1,0) \end{cases}$ نقاط بحرانی

(۳) $\begin{cases} 3x^2+y^2=1 \\ x=0 \end{cases} \Rightarrow y=\pm 1 \Rightarrow \begin{cases} P_4(0,1) \\ P_5(0,-1) \end{cases}$

(۴) $\begin{cases} 3x^2+y^2=1 \\ x^2+3y^2=1 \end{cases} \Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow$ $P_6(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ $P_7(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

$y^2=x^2 \Rightarrow y = \pm x$ $\qquad P_8(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ $P_9(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

	A	B	C	D	
P_1	0	1	0	−1	زینی
P_2	0	−2	0	−4	زینی
P_3	0	−2	0	−4	زینی
P_4	0	−2	0	−4	زینی
P_5	0	−2	0	−4	زینی
P_6	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	max نسبی
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$A = f_{xx} = -6xy$

$B = f_{xy} = 1 - 3x^2 - 3y^2$

$C = f_{yy} = -6xy$

$D = AC - B^2$

تمرین: مطلوب است تعیین نقاط بحرانی و اکسترمم های نسبی تابع $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

$$f(x,y) = 9y - 3x^2y - y^3 + 6xy$$

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مثال) خم C به معادلات پارامتری $x=\cos t$ و $y=\sin t$ و $z=\cos 2t$ مفروض است.

الف) نشان دهید که C بر یک رویه درجه ۲ قرار دارد. (ارتباط بین x و y و z)

ب) نقطه یا نقاطی از خم C را تعیین کنید که خط مماس بر C در این نقاط تماماً بر رویه فوق قرار گیرد.

حل) $\forall t\in\mathbb{R},\quad x^2-y^2=\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t=z$

$\Longrightarrow C\subseteq S:\ x^2-y^2=z$ (سهمی‌گون هذلولوی یا زین اسبی)

ب) فرض کنیم L خط مماس در نقطه $p\in C$ متناظر با پارامتر t باشد

$p(\underbrace{\cos t}_{x_0},\underbrace{\sin t}_{y_0},\underbrace{\cos 2t}_{z_0})\in L \qquad r(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ \cos 2t\end{pmatrix}$

$\Longrightarrow r'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t & a\\ \cos t & b\\ -2\sin 2t & c\end{pmatrix}\parallel L \qquad L:\begin{cases}x(s): (-\sin t)s+\cos t\\ y(s): (\cos t)s+\sin t\\ z(s): (-2\sin 2t)s+\cos 2t\end{cases};\ s\in\mathbb{R}$

$L\subseteq S \iff \forall s\in\mathbb{R}\quad x(s)^2-y(s)^2=z(s)$

$\iff \big((-\sin t)s+\cos t\big)^2-\big((\cos t)s+\sin t\big)^2=(-2\sin 2t)s+\cos 2t \quad (\forall s\in\mathbb{R})$

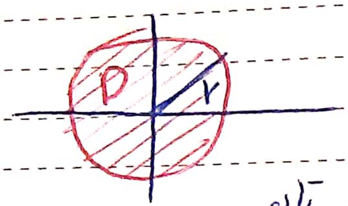
$(\sin^2 t-\cos^2 t)s^2=0$

$\sin^2 t+\cos^2 t=0 \Longrightarrow \tan^2 t=1 \Longrightarrow t=K\pi\pm\frac{\pi}{4}$ $(K\in\mathbb{N})$

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$\|(x,y)-(0,0)\| = \sqrt{x^2+y^2}$

تعریف: ناحیه $D \subseteq \mathbb{R}^n$ را یک ناحیه بسته نامیم، هرگاه نقاط مرزی خود را دربرداشته باشد.



$$D = \{(x,y) : x^2+y^2 \leq r^2\}$$

قضیه: فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^n$ ناحیه‌ای بسته و کراندار باشد. اگر تابع $f: D \to \mathbb{R}$ بر D پیوسته باشد، آنگاه f اکسترمم های مطلق خود را بر D اتفاق می کند؛ یعنی نقاط p و q در D وجود دارند که

$$\forall x \in D; \quad f(q) \leq f(x) \leq f(p)$$

برای پیدا کردن اکسترمم های مطلق یک تابع پیوسته بر یک مجموعه‌ی بسته و کراندار به روش زیر عمل می کنیم:

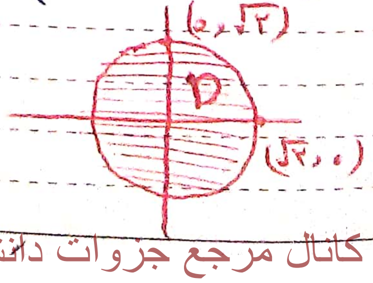
(۱) ابتدا نقاط بحرانی f که درون ناحیه D قرار دارند را بدست می آوریم.

(۲) سپس با تحدید دامنه تعریف f بر مرز ناحیه D، نقاطی از مرز را بدست می آوریم که f در آن نقاط احتمالاً اکسترمم داشته باشد.

(۳) با مقایسه مقادیر f در دو دسته از نقاط فوق می توانیم max و min مطلق f را بیابیم.

مثال) اکسترمم های مطلق هریک از توابع زیر را بر نواحی داده شده بدست آورید.

الف) $f(x,y) = x^2+y^2-4xy \qquad D := \{(x,y) : x^2+y^2 \leq 2\}$



کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

بالتوجه به مشتق پذیری f، نقاط

حل) ① تعیین نقاط بحرانی f درون ناحیه D: بحرانی آن از معادله زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4y = 0 \Rightarrow 2y = x \\ 2y - 4x = 0 \Rightarrow y = 2x \end{cases} \Rightarrow P_0 = (0,0)$$

تنها نقطه بحرانی f که درون D نیز قرار دارد.

② تعیین اکسترمم‌های f با تحدید دامنه تعریف آن به مرز ناحیه D:

D مرز: $C = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 2\}$

پارامتری شده $\Longrightarrow$ $C: \begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t \\ y = \sqrt{2}\sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi]$

$$g(t) = f(x,y)\Big|_C = f(\sqrt{2}\cos t, \sqrt{2}\sin t) = 2 - 8\sin t\cos t = 2 - 4\sin 2t, \quad t \in [0, 2\pi]$$

نابراین برای تعیین اکسترمم‌های $f\big|_C$ کافی است اکسترمم‌های تابع $g(t)$ را در ناحیه $[0, 2\pi]$ بدست آوریم:

$$\forall t \in (0, 2\pi);\ g'(t) = 0 \Longrightarrow -8\cos 2t = 0$$

$$\Longrightarrow 2t = k\pi + \frac{\pi}{2} \Longrightarrow t = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$k = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow P_1(1,1)$ / $k = 2 \Rightarrow t_3 = \frac{5\pi}{4} \Rightarrow P_3(-1,-1)$

$k = 1 \Rightarrow t_2 = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow P_2(-1,1)$ / $k = 3 \Rightarrow t_4 = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow P_4(1,-1)$

$t = 0$ یا $2\pi \Longrightarrow P_5(\sqrt{2}, 0)$

چگونه شاد شود اندرون غمگینم

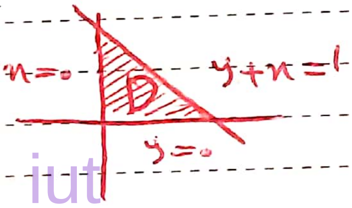
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

نقاط	مقدار f
تنها نقطه بحرانی $P_0(0,0)$	0
$P_1(1,1)$	-2
$P_2(-1,1)$	6
$P_3(-1,-1)$	-2
$P_4(1,-1)$	6
$P_5(\sqrt{2},0)$	2

مطلق $\min f = -2 = f(P_1) = f(P_3)$

مطلق $\max f = 6 = f(P_2) = f(P_4)$

ب) $f(x,y) = \cosh(3x-2y)$ $\quad D = \{(x,y) : y \geq 0 ,\ x \geq 0 ,\ x+y \leq 1\}$



@jozve_iut

حل) ① تعیین نقاط بحرانی f درون ناحیه D:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\sinh(3x-2y) = 0 \\ -2\sinh(3x-2y) = 0 \end{cases} \Rightarrow 3x - 2y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}x$$

بنابراین مجموعه نقاط به صورت $(x, \frac{3}{2}x)$ ← $\{(x,y) : y = \frac{3}{2}x\}$

که درون ناحیه D قرار دارند برای f بحرانی محسوب می‌شوند.

$$f(x, \tfrac{3}{2}x) = \cosh(3x - 2 \times \tfrac{3}{2}x) = \cosh(0) = 1$$

② تعیین اکسترمم‌های احتمالی f با تحدید دامنه آن به مرز D:

$$\text{مرز } D = C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

$$C_1 = \{(x,y) : x = 0 ,\ 0 \leq y \leq 1\} = \{(0,y) : 0 \leq y \leq 1\}$$

$$C_2 = \{(x,0) : 0 \leq x \leq 1\}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$c_3 = \{(x,y) : y = 1-x \ , \ 0 \leq x \leq 1\} = \{(x, 1-x) : 0 \leq x \leq 1\}$

$g_1 = f|_{c_1} = f(0,y) = \cosh(-2y) \ , \ y \in [0,1]$

$\forall y \in (0,1) \quad g_1'(y) = -2\sinh(-2y) = 0 \Longrightarrow y = 0 \notin (0,1)$

$$\begin{cases} y = 0 \Longrightarrow P_1(0,0) \\ y = 1 \Longrightarrow P_2(0,1) \end{cases}$$

$g_2 = f|_{c_2} = f(x,0) = \cosh(3x) \ , \ x \in [0,1]$

$\forall x \in (0,1) \ , \ g'(x) = 3\sinh 3x = 0 \Longrightarrow x = 0 \notin (0,1)$

$\begin{cases} x = 0 \Longrightarrow \end{cases}$ قبلاً حساب شده

$x = 1 \Longrightarrow P_3(1,0)$

@jozve_iut

$g_3 = f|_{c_3} = f(x, 1-x) = \cosh(5x-2) \ , \ x \in [0,1]$

$\forall x \in (0,1) \ , \ g_3'(x) = 5\sinh(5x-2) = 0$

$\Longrightarrow 5x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{2}{5} \Longrightarrow y = \frac{3}{5} \Longrightarrow P_4\left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$

	نقاط	مقدار f
دسته‌ای از نقاط بحرانی f درون D	$(x, \frac{3}{2}x)$	1
	$P_1(0,0)$	1
	$P_2(0,1)$	$\cosh(-2)$
	$P_3(1,0)$	$\cosh(3)$
	$P_4(\frac{2}{5}, \frac{3}{5})$	1

min f مطلق

max f مطلق

به چشم شوخ تو جان کی توان برد / که دایم با کمان اندر کمین است

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

۱۳۹۱ آبان **۱۱** پنجشنبه

2012 **1** **November** Thursday

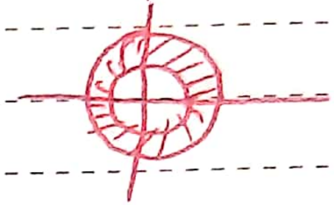
۱۶ ذی‌الحجه ۱۴۳۳

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۵	۴	۳	۲	۱		
۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶
۱۹	۱۸	۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳
۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	۲۲	۲۱	۲۰
			۳۰	۲۹	۲۸	۲۷

تمرین: اکسترمم‌های مطلق f را بر ناحیه داده شده زیر بدست آورید

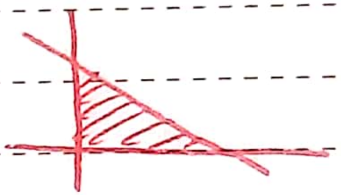
۷ الف) $f(x,y)=ye^{-(x^2+y^2)}$, $D=\{(x,y): 1\le x^2+y^2\le 4\}$

@jozve_iut

۸ 

۲ تا مرز

ب) $f(x,y)=x^3+xy^2-4xy$ $D=\{(x,y): x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 5\}$

۱۰ 

۳ تا مرز

۱۱

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

اکسترمم های مقید یا مشروط:

فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f: D \to \mathbb{R}$ بر D تعریف شده باشد.
اکسترمم های احتمالی f بر C (یعنی برای زیرمجموعه C از D با تقید دامنه f بر C، اکسترمم های احتمالی تابع $f: C \to \mathbb{R}$) درصورت وجود لزوماً منطبق بر اکسترمم های احتمالی f بر D نخواهد بود. درحالتی که C مجموعه تراز تابعی چون $g: D \to \mathbb{R}$ به ازای ثابتی چون K باشد (یعنی: $C = \{x \in D : g(x) = K\}$) آنگاه اکسترمم های تابع $f: C \to \mathbb{R}$ را اکسترمم های مقید یا مشروط f تحت شرط یا قید $g = K$ می نامیم.

قضیه (لاگرانژ): فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^n$ و تابع $f: D \to \mathbb{R}$ بر D مشتق پذیر باشد همچنین فرض کنیم تابع f در نقطه $p \in D$ دارای یک اکسترمم مقید تحت شرط $g = K$ داشته باشد. (یعنی تابع f بر یک اکسترمم داشته باشد که $C = \{x \in D : g(x) = K\}$)
به علاوه اگر $\vec{\nabla} g(p) \neq \vec{0}$، آنگاه ثابت $\lambda \in \mathbb{R}$ وجود دارد که

$$\vec{\nabla} f(p) = \lambda \vec{\nabla} g(p)$$

به عبارت دیگر

$$\begin{cases} f_{x_1}(p) = \lambda g_{x_1}(p) \\ \vdots \\ f_{x_n}(p) = \lambda g_{x_n}(p) \\ g(p) = K \end{cases}$$

مثال) اکسترمم های مطلق تابع $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ با ضابطه $f(x,y,z) = 2xy - z^2$ را بر مجموعه بسته و کراندار $D = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + 4z^2 \leq 4\}$ را بیابید.

حل) ① تعیین نقاط بحرانی f درون ناحیه D: با توجه به مشتق پذیری تابع f نقاط بحرانی آن از معادله زیر بدست می آید.

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \\ f_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y = 0 \\ 2x = 0 \\ -2z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y = z = 0 \Rightarrow P_1(0,0,0) \quad f(P_1) = 0$$

تنها نقطه بحرانی f که درون D نیز قرار دارد.

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

۲ تعیین اکسترمم‌های احتمالی f بر مرز D :

مرز D : $S = \{(x,y,z) \in D : \underbrace{x^2+y^2+4z^2}_{g} = 4\}$

بنابراین S مجموعه تراز تابع $g(x,y,z) = x^2+y^2+4z^2$ به ازای ثابت $K=4$ است

بنابراین هدف پیدا کردن اکسترمم‌های مقید f تحت قید $g(x,y,z) = x^2+y^2+4z^2=4$ می‌باشد، پس طبق قضیه لاگرانژ

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \\ g = 4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2y = \lambda 2x & (1) \\ 2x = \lambda 2y & (2) \\ -2z = \lambda 8z & (3) \\ x^2+y^2+4z^2 = 4 & (4) \end{cases}$$

@jozve_iut

$$x=0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} y=0 \overset{(4)}{\Longrightarrow} z^2=1 \Longrightarrow z=\pm 1 \Longrightarrow \begin{cases} P_2(0,0,1) \\ P_3(0,0,-1) \end{cases}$$

1/2

$x \neq 0$:
- $y=0$ تناقض با (۲)
- $y \neq 0$:
  - $z=0 \overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} \lambda = \frac{y}{x} = \frac{x}{y} \Longrightarrow x^2=y^2 \Longrightarrow y = \pm x$
    $\overset{(4)}{\Longrightarrow} 2x^2=4 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{2} \Longrightarrow \begin{cases} P_4(\sqrt{2},\sqrt{2},0) \\ P_5(\sqrt{2},-\sqrt{2},0) \\ P_6(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0) \\ P_7(-\sqrt{2},\sqrt{2},0) \end{cases}$
  - $z \neq 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} \lambda = -\frac{1}{4}$ تناقض با (۱) و (۲)

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

	نقاط	مقدار f
نقطه بحرانی	P_1	۰
	P_2	-1
	P_3	-1
	P_4	۴
	P_5	-4
	P_6	۴
	P_7	-4

P_4 و P_6 → max f مطلق

P_5 و P_7 → min f مطلق

مثال میانترم 8 اکسترمم‌های مطلق و نسبی تابع $f(x,y)=2+x^2+y^2$ را بر ناحیه بسته و کراندار $\{1\}$ $D=\{(x,y): \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\}$ را تعیین کنید.

حل) ① تعیین نقاط بحرانی f درون ناحیه D: نقاط بحرانی با توجه به مشتق پذیری f از معادله‌ی زیر بدست می‌آید:

@jozve_iut

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x=0 \\ 2y=0 \end{cases} \Longrightarrow x=y=0 \Longrightarrow P_1(0,0)$$

تنها نقطه بحرانی f که درون D نیز قرار دارد

$A=f_{xx}=2$ $\quad C=f_{yy}=2$

$B=f_{xy}=0$

نقاط	A	B	C	$D=AC-B^2$
$P_1(0,0)$	۲	۰	۲	$4>0$

← $P_1(0,0)$ می‌نیمم نسبی برای f است

② تعیین ~~نقاط~~ اکسترمم‌های f واقع بر مرز D:

$$D \text{ مرز}: C=\{(x,y)\in D: \underbrace{\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}}_{g(x,y)}=1\}$$

بنابراین باید اکسترمم‌های مقید f را تحت شرط $g(x,y)=1$ بدست آوریم: طبق لاگرانژ

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ g = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x = \lambda \frac{x}{2} & (1) \\ 2y = \lambda \frac{2y}{9} & (2) \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 & (3) \end{cases}$$

$$x = 0 \xrightarrow{(3)} y = \pm 3 \Longrightarrow \begin{cases} P_2(0,3) \\ P_3(0,-3) \end{cases}$$

$$x \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \xrightarrow{(3)} x = \pm 2 \Longrightarrow \begin{cases} P_4(2,0) \\ P_5(-2,0) \end{cases} \\ y \neq 0 \xrightarrow{(1)} \lambda = 4, \quad \xrightarrow{(2)} \lambda = 9 \end{cases}$$

تناقض با (۱) و (۲)

نقاط	مقدار f
P_1	۲
P_2	۱۱
P_3	۱۱
P_4	۶
P_5	۶

$P_1 \to$ min f مطلق

$P_2, P_3 \to$ max f مطلق

مستقیم فقط روش لاگرانژ / فقط اکسترمم روی مرز را می‌خواهد

تمرین) نزدیک‌ترین نقطه و دورترین نقطه از رویه‌ی S به معادله $x^2+2x+4y^2+9z^2=1$ را نسبت به مبدأ مختصات تعیین کنید.

(زیر $x^2+2x+4y^2+9z^2$ نوشته شده: g)

(راهنمایی: اگر $P(x,y,z)$ نقطه‌ای دلخواه از رویه S باشد، فاصله آن تا مبدأ برابر است با $\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ فاصله p تا مبدأ

پس کافیست کمترین و بیشترین مقدار تابع $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ را تحت شرط $g(x,y,z) = x^2+2x+4y^2+9z^2=1$ پیدا کنیم)

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

در واقع اکسترمم‌های مقید f تحت قید (شرط) g = ۱ را بدست می‌آوریم:

طبق لاگرانژ $\exists \lambda \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x \\ f_y = \lambda g_y \\ f_z = \lambda g_z \\ g = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 2x = 2\lambda(x+1) & (1) \\ 2y = 8\lambda y & (2) \\ 2z = 18\lambda z & (3) \\ x^2+2x+4y^2+9z^2 = 1 & (4) \end{cases}$$

$$x = 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \lambda = 0 \Longrightarrow \overset{(2),(3)}{\Longrightarrow} y = z = 0$$ تناقض با (۴)

$x \neq 0$

- $y = 0$
  - $z = 0 \overset{(4)}{\Longrightarrow} x^2+2x = 1 \Longrightarrow x = -1 \pm \sqrt{2}$
    $\Longrightarrow \begin{cases} P_1(-1+\sqrt{2}, 0, 0) \\ P_2(-1-\sqrt{2}, 0, 0) \end{cases}$
  - $z \neq 0 \overset{(3)}{\Longrightarrow} \lambda = \frac{1}{9} \overset{(1)}{\Longrightarrow} x = \frac{1}{8} \overset{(4)}{\Longrightarrow} z^2 = \frac{47}{9 \times 64}$
    $\Longrightarrow z = \pm \frac{\sqrt{47}}{24} \Longrightarrow \begin{cases} P_3(\frac{1}{8}, 0, \frac{\sqrt{47}}{24}) \\ P_4(\frac{1}{8}, 0, -\frac{\sqrt{47}}{24}) \end{cases}$
- $y \neq 0$
  - $z = 0 \overset{(2)}{\Longrightarrow} \lambda = \frac{1}{4} \overset{(1)}{\Longrightarrow} x = \frac{1}{3}$
    $\overset{(4)}{\Longrightarrow} y = \pm \frac{1}{3\sqrt{2}} \Longrightarrow \begin{cases} P_5(\frac{1}{3}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, 0) \\ P_6(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3\sqrt{2}}, 0) \end{cases}$
  - $z \neq 0 \overset{(2),(3)}{\Longrightarrow} \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4} \\ \lambda = \frac{1}{9} \end{cases}$ تناقض

جدول به عهده خودتان

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

sin h و tan هم همین طورند.

$$\lim_{u\to 0}\frac{\sin au}{bu}=\frac{a}{b}$$

مثال) تابع $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ با ضابطه

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2x^3-y^3)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مفروض است.

الف) مطلوب است تعیین مشتق سویی (جهتی) f در $(0,0)$ و در سوی بردار یکه $\vec{u}=a\hat{i}+b\hat{j}$

ب) در مورد مشتق‌پذیری تابع f در $(0,0)$ چه می‌توان گفت؟ چرا؟

ج) از مبدأ مختصات در چه جهتی حرکت کنیم تا مقدار تابع با بیشترین سرعت ممکن افزایش یابد؟

الف)

$$D_u f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(at,bt)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\dfrac{\sin(2a^3t^3-b^3t^3)}{a^2t^2+b^2t^2}}{t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left((2a^3-b^3)t^3\right)}{t^3}=2a^3-b^3$$

@jozve_iut

ب) اگر f بخواهد در $(0,0)$ مشتق‌پذیر باشد، باید

$$D_u f(0,0)=\vec{\nabla}f(0,0)\cdot\vec{u}=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot a+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot b$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=D_i f(0,0)=2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=D_j f(0,0)=-1$$

$$\Longrightarrow D_u f(0,0)=2a-b$$

بنابراین باید برای بردار یکه $\vec{u}=a\hat{i}+b\hat{j}$ داشته باشیم

$$2a-b=2a^3-b^3$$

اما اگر $u=\frac{3}{5}\hat{i}+\frac{4}{5}\hat{j}$ باشد آنگاه $a=\frac{3}{5}$ ، $b=\frac{4}{5}$ پس

$$2a-b=\frac{2}{5}\neq 2a^3-b^3=2\times\left(\frac{3}{5}\right)^3-\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{-2}{125}$$

پس f در $(0,0)$ مشتق‌پذیر نیست.

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

ج) بیشترین مقدار تابع $D_u f(0,0)$ تحت

$$\begin{cases} D_u f(0,0) = 2a^3 - b^3 = h(a,b) \\ a^2+b^2 = 1 = k(a,b) \end{cases}$$

شرط $a^2+b^2=1$ خواسته ی مسئله است.

برمی گرده به اکسترمم ها

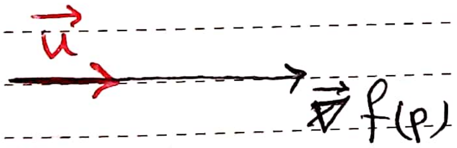
بیشترین مقدار تابع $h(x,y) = 2x^3 - y^3$ تحت شرط $g(x,y) = x^2+y^2 = 1$ را بدست می آوریم:

یه روش دیگه

اگر f مشتق پذیر باشد، $D_u f(p) = \vec{\nabla} f(p) \cdot \vec{u} = \|\nabla f(p)\| \|u\| \cos\theta$

$D_u f(p)$ بیشترین مقدار را دارد $\iff \cos\theta = 1 \iff \theta = 0 \iff \nabla f(p) \parallel u$ موازی و هم جهت

$$\Rightarrow u = \frac{\nabla f(p)}{\|\nabla f(p)\|}$$



کمترین مقدار وقتی است موازی و خلاف جهت

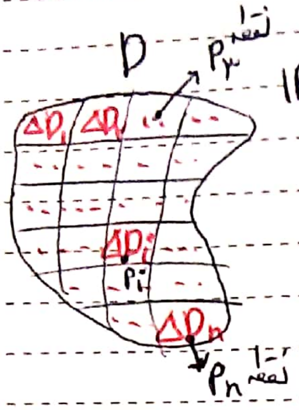
برای کمترین سرعت

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

فصل ۲ «انتگرال های چندگانه»

انتگرال دوگانه:



فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای بسته و کران‌دار باشد. برای هر افراز $P=\{\Delta D_1,\dots,\Delta D_n\}$ از ناحیه‌ی D به نواحی کوچکتر، و برای هر $i=1,\dots,n$، ΔA_i را مساحت ناحیه ΔD_i و $L(\Delta D_i)$ را قطر این ناحیه در نظر می‌گیریم و قرار می‌دهیم:

$\|P\| = \max\{L(\Delta D_1),\dots,L(\Delta D_n)\}$ نرم افراز P

فرض کنیم $f: D\to\mathbb{R}$ تابعی کران‌دار باشد. برای افراز $P=\{\Delta D_1,\dots,\Delta D_n\}$ از ناحیه D و با انتخاب نقاط $p_1\in\Delta D_1,\dots,p_n\in\Delta D_n$ عبارت $\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta A_i$ را حاصل جمع ریمان تابع f به ازای افراز P نامیده و با نماد $S(f,P)$ نمایش می‌دهیم.

با میل دادن $\|P\|$ به سمت صفر، اگر $\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P)$ وجود داشته باشد، آنگاه f را بر D انتگرال‌پذیر نامیده و با یکی از نمادهای $\iint_D f\,dA$ یا $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ نمایش می‌دهیم و به این ترتیب

$$\iint_D f\,dA = \lim_{\|P\|\to 0} S(f,P) = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta A_i$$

مثال: فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای بسته و کران‌دار و مساحت‌پذیر باشد. اگر $f: D\to\mathbb{R}$ تابع ثابت $f(x,y)=k$ باشد. در این صورت برای هر افراز $P=\{\Delta D_1,\dots,\Delta D_n\}$ از ناحیه D و هر انتخاب $p_1\in\Delta D_1,\dots,p_n\in\Delta D_n$ داریم:

@jozve_iut کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$\forall i = 1, \dots, n \,,\quad f(p_i) = K \Rightarrow S(f,p) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(p_i)}_{K} \Delta A_i$

$= K \sum_{i=1}^{n} \Delta A_i = KA$ → مساحت ناحیه D

$\Rightarrow \iint_D \underbrace{f}_{K} dA = \lim_{\|p\| \to 0} S(f,p) = \lim_{\|p\| \to 0} KA = KA$

درنتیجه اگر $K=1$، آنگاه

$\iint_D dA = A$ → مساحت ناحیه D

قضیه: فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای بسته و کراندار و مساحت پذیر باشد. اگر $f: D \to \mathbb{R}$ بر D پیوسته باشد آنگاه f بر D انتگرال پذیر است.

با توجه به قضیه‌های فوق می‌توان نتایج زیر را در مورد انتگرال دوگانه بدست آورد:

(۱) برای هر دو تابع انتگرال پذیر $f, g : D \to \mathbb{R}$ و برای هر دو عدد $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ داریم:

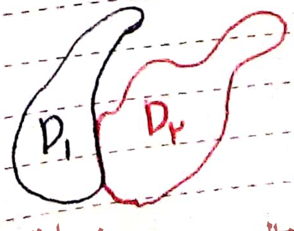
$$\iint_D (\alpha f + \beta g)\, dA = \alpha \iint_D f\, dA + \beta \iint_D g\, dA$$

(۲) برای هر دو تابع انتگرال پذیر $f, g : D \to \mathbb{R}$. اگر برای هر $(x,y) \in D$، $f(x,y) \leq g(x,y)$ آنگاه:

$$\iint_D f\, dA \leq \iint_D g\, dA$$

(۳) اگر f بر نواحی D_1 و D_2 انتگرال پذیر باشد و D_1 و D_2 حداکثر در مرزهای خود با هم اشتراک داشته باشند آنگاه:

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f\, dA = \iint_{D_1} f\, dA + \iint_{D_2} f\, dA$$

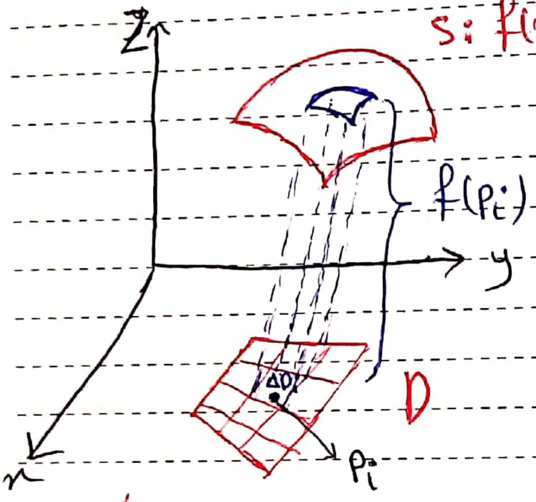


@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

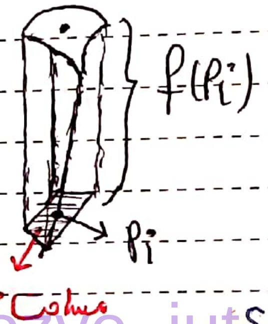
تعبیر هندسی انتگرال دوگانه:

فرض کنیم $D\subseteq \mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای بسته و کراندار و مساحت‌پذیر بوده و $f:D\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته و نامنفی بر D باشد. همچنین فرض کنیم S رویه نمایش تابع f در $\mathbb{R}^3$ باشد.

برای افراز $P=\{\Delta D_1,\dots,\Delta D_n\}$ از ناحیه D و با انتخاب نقاط $p_1\in\Delta D_1,\dots,p_n\in\Delta D_n$



عبارت $f(p_i)\,\Delta A_i$ تقریباً حجم ناحیه زیر رویه S و بالای ناحیه ΔD_i را نمایش می‌دهد. پس



$$S(f,P)=\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\,\Delta A_i$$

حجم ناحیه کوچک $\simeq f(p_i)\,\Delta A_i$

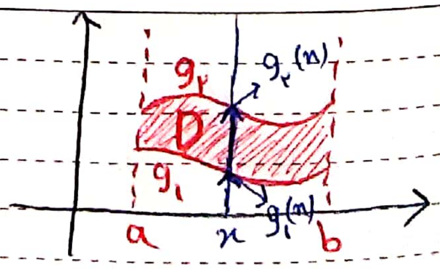
تقریباً حجم ناحیه‌ی زیر رویه S و بالای ناحیه D را نشان می‌دهد. بنابراین

$$\text{حجم ناحیه } V=\iint_D f\,dA=\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P)$$

* روش‌های محاسبه انتگرال دوگانه:

۱- ناحیه ساده عمودی (y-ساده): ناحیه بسته و کراندار $D\subseteq\mathbb{R}^2$ را y-ساده نامیم هرگاه بازه $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ و توابع $g_1,g_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ با شرط $g_1(x)\le g_2(x)$ وجود داشته باشند که

$$(x,y)\in D \iff \begin{cases} a\le x\le b\\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\end{cases}$$



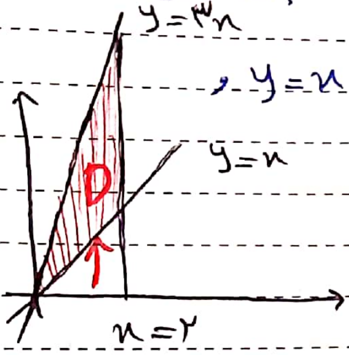
@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

در این حالت اگر $f: D \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد می‌توان ثابت کرد که

$$\iint_D f\,dA = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی هریک از انتگرال‌های زیر:

الف) $\iint_D (x^2 - 2xy)\,dA$ ، D ناحیه محصور بین خطوط $y=x$ و $y=3x$ و خط $x=2$



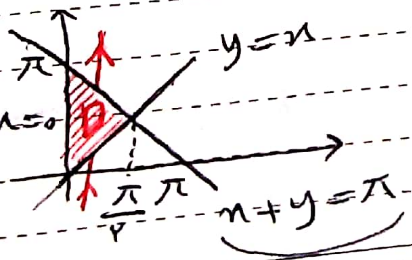
$$D = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ x \le y \le 3x \end{cases}$$
به عنوان ناحیه y-ساده

$$\Rightarrow \iint_D (x^2-2xy)\,dA = \int_0^2 \left(\int_x^{3x} (x^2-2xy)\,dy \right) dx$$

$$= \int_0^2 \left[x^2y - \frac{2xy^2}{2} \right]_x^{3x} dx = \int_0^2 (3x^3 - 9x^3) - (x^3 - x^3)\,dx$$

$$= \int_0^2 -6x^3\,dx = -\frac{6x^4}{4} \Big]_0^2 = \boxed{-24}$$

ب) $\iint_D \sin(x-y)\,dA$ ، D ناحیه محصور توسط خطوط $x=0$ ، $y=x$ ، $x+y=\pi$



$$D = \begin{cases} 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ x \le y \le \pi - x \end{cases}$$
به عنوان ناحیه y-ساده

$y = \pi - x$

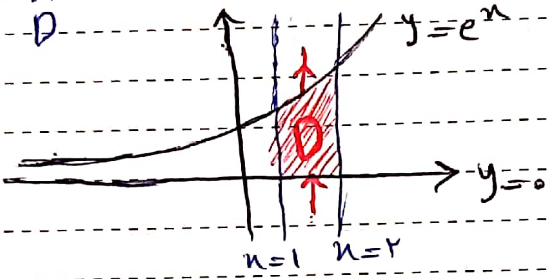
$$\Rightarrow \iint_D \sin(x-y)\,dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_x^{\pi - x} \sin(x-y)\,dy \right) dx$$

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x-y)\Big]_{x}^{\pi-x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(2x-\pi)-1\right) dx$$

$$= \frac{1}{2}\sin(2x-\pi) - x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{-\pi}{2}}$$

ج) $\iint_D e^{2x}\, dA$ ، D ناحیه محصور بین خم $y=e^x$ و خطوط $x=1$ ، $x=2$ و $y=0$

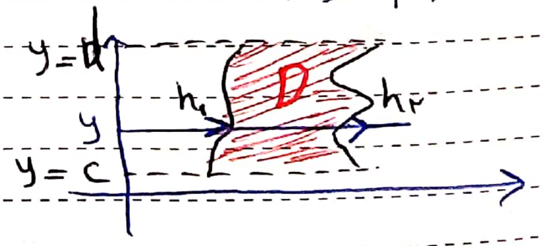


D به عنوان ناحیه y-ساده $= \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq e^x \end{cases}$

$$\Longrightarrow \iint_D e^{2x}\, dA = \int_1^2 \left(\int_0^{e^x} e^{2x}\, dy \right) dx = \cdots$$

۲- ناحیه ساده افقی (x-ساده) : ناحیه بسته و کراندار $D \subseteq \mathbb{R}^2$ را یک ناحیه افقی یا x-ساده نامیم، هرگاه بازه $[c,d] \subseteq \mathbb{R}$ و توابع $h_1, h_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ با شرط $h_1(y) \leq h_2(y)$ وجود داشته باشند که

$$(x,y) \in D \iff \begin{cases} h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$



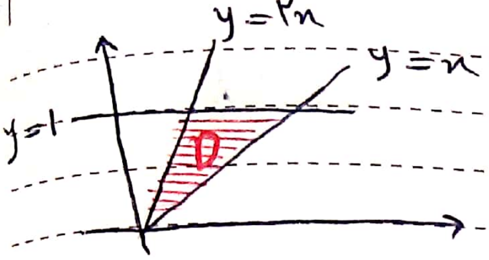
در این حالت اگر $f : D \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته بر چنین ناحیه‌ای باشد، می‌توان ثابت کرد

$$\iint_D f\, dA = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$$

x-ساده

د) $\iint_D 2x\, dA$ ، D ناحیه محصور توسط خطوط $y=x$ ، $y=2x$ و $y=1$

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان



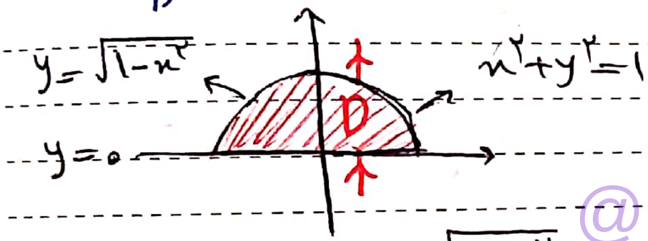
D به عنوان ساده x $= \begin{cases} \frac{y}{2} \le x \le y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \iint_D 2x\,dA = \int_0^1 \left(\int_{\frac{y}{2}}^{y} 2x\,dx\right) dy = \int_0^1 x^2\Big]_{\frac{y}{2}}^{y} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{3y^2}{4}\,dy = \dots$$

$I = \iint_D x^2\sqrt{1-y^2}\,dA$ (راه)

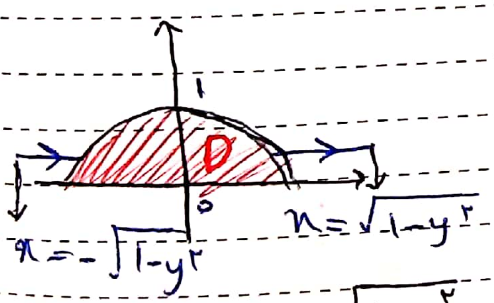
D ناحیه محصور توسط دایره‌ی $x^2+y^2=1$ در ناحیه $y \ge 0$.



D به عنوان ناحیه ساده y $= \begin{cases} -1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \end{cases}$

$$\Rightarrow I = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2\sqrt{1-y^2}\,dy\right) dx \quad \dots\dots$$ محاسبات طولانی

D به عنوان ناحیه ساده x $= \begin{cases} -\sqrt{1-y^2} \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$



$$I = \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x^2\sqrt{1-y^2}\,dx\right) dy$$

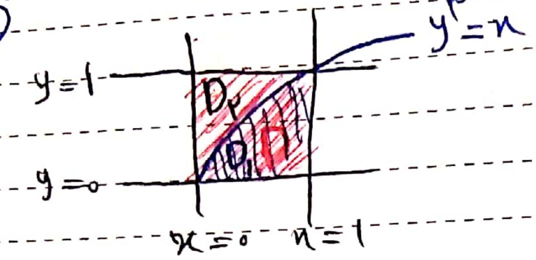
$$= \int_0^1 \frac{x^3}{3}\sqrt{1-y^2}\Big]_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dy = \int_0^1 \frac{2(1-y^2)^2}{3}\,dy$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{3}(1-2y^2+y^4)\,dy = \frac{2}{3}\left(y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right)\Big]_0^1 = \boxed{\frac{16}{45}}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

D ناحیه محصور بین خطوط $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$

و) $\iint_D |x-y^3|\,dA$ $\qquad D=[0,1]\times[0,1]$



$$\iint_D |x-y^3|\,dA=\iint_{D_1}|x-y^3|\,dA+\iint_{D_2}|x-y^3|\,dA$$

$$=\iint_{D_1}(x-y^3)\,dA+\iint_{D_2}(y^3-x)\,dA$$

$D_1=\begin{cases} y^3\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$ ناحیه x_ساده $\qquad D_2=\begin{cases} 0\le x\le y^3\\ 0\le y\le 1\end{cases}$ ناحیه x_ساده

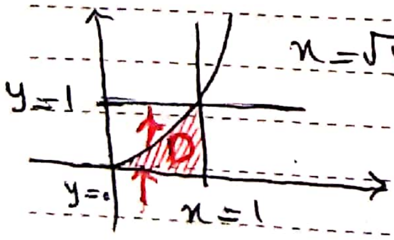
@jozve_iut

«تعویض ترتیب و انتگرال گیری»

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی هر یک از انتگرال های زیر؟

الف) $I=\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 e^{\frac{y}{x}}\,dx\,dy$ $\qquad$ به عنوان D x_ساده $D=\begin{cases}\sqrt{y}\le x\le 1\\ 0\le y\le 1\end{cases}$

چون در وهله اول انتگرال قابل حل نیست حدود را عوض می‌کنیم. یعنی اگر حدود را عوض کنیم راحت‌تره.



$x=\sqrt{y}$ یا $y=x^2$

به عنوان D y_ساده $D=\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le x^2\end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_0^1\left(\int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x}}\,dy\right)dx=\int_0^1 \left[x e^{\frac{y}{x}}\right]_0^{x^2}dx$$

$$=\int_0^1 (xe^x-x)\,dx \overset{*}{=} xe^x-e^x-\frac{x^2}{2}\Big]_0^1=-\frac{1}{2}+1=\boxed{\frac{1}{2}}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

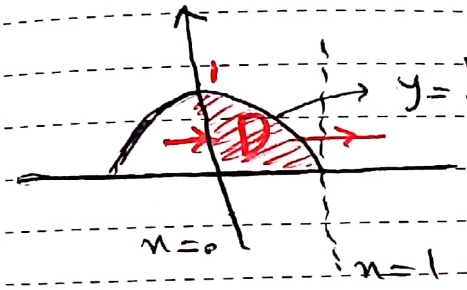
$$\int e^{ay}\,dy = \frac{1}{a}e^{ay}$$

* $\int xe^x\,dx = xe^x - e^x + c$

مشتق	انتگرال
x	e^x (+)
1	e^x (−)
0	e^x

وقتی نمایی و چند جمله‌ای داریم از چند جمله‌ای مشتق می‌گیریم و از نمایی انتگرال (جزء به جزء)

ب) $I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-y^2)^{\frac{1}{2}}\,dy\,dx$ D به عنوان y-ساده $D = \begin{cases} 0 \le y \le \sqrt{1-x^2} \\ 0 \le x \le 1 \end{cases}$



$y = \sqrt{1-x^2}$ یا $x = \sqrt{1-y^2}$

D به عنوان x-ساده $D = \begin{cases} 0 \le x \le \sqrt{1-y^2} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$

$\Rightarrow I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \sqrt{1-y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 (\sqrt{1-y^2})\,x \Big]_0^{\sqrt{1-y^2}} dy$

$= \int_0^1 \sqrt{1-y^2}\,dy = y - \frac{y^3}{3}\Big]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$

@jozve_iut

تعویض متغیر در انتگرال دوگانه:

فرض کنیم D^* ناحیه‌ای بسته و کراندار در صفحه uov باشد و همچنین فرض کنیم $y = y(u,v)$, $x = x(u,v)$ توابعی تعریف شده بر این ناحیه باشند.

در این صورت تابع $G: D^* \to IR^2$ با ضابطه‌ی [struck out] $G(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ تابعی با دامنه D^* و مقادیر در IR^2 می‌باشد.

فرض کنیم شرایط زیر برقرار باشند:

۱) تابع G در نقاط درونی D^* یک به یک باشد.

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

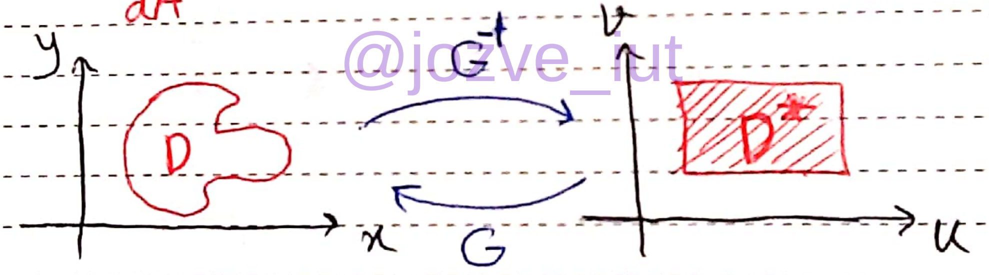
۲) توابع $x=x(u,v)$ و $y=y(u,v)$ در نقاط درونی D^* دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند.

۳) برای هر نقطه درونی (u,v) از D^*، $\det\begin{pmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{pmatrix}\neq 0$.

این دترمینان را ژاکوبین تغییر متغیر نامیده و با نماد $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ نمایش می‌دهیم.

در این صورت اگر قرار دهیم $D=G(D^*)$ و $f:D\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد آنگاه:

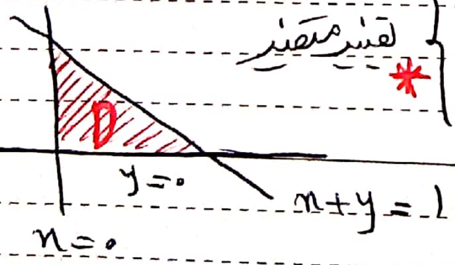
$$\iint_D f(x,y)\,\underbrace{dx\,dy}_{dA} = \iint_{D^*} f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\underbrace{du\,dv}_{dA^*}$$



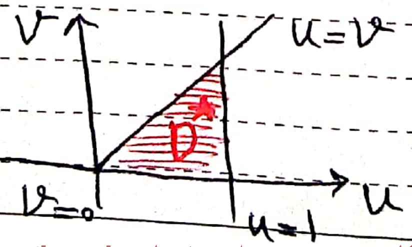
@jozve_iut

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی هر یک از انتگرال‌های زیر:

الف) $\iint_D e^{\frac{y}{x+y}}\,dx\,dy$ ، D ناحیه محصور توسط خطوط $x+y=1$ ، $x=0$ و $y=0$.



تغییر متغیر *
$$\begin{cases}u=x+y\\ v=y\end{cases}\Rightarrow\quad \begin{aligned}&x+y=1\Rightarrow u=1\\ &x=0\Rightarrow u=v\\ &y=0\Rightarrow v=0\end{aligned}$$



@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$* \Longrightarrow \begin{cases} x = u - v \\ y = v \end{cases} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}$$

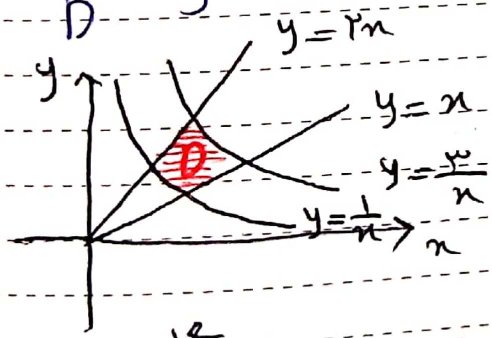
$$= \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \qquad I = \iint_{D^*} e^{\frac{v}{u}} |1| \, du\, dv$$

D^* به عنوان v داده $= \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq u \end{cases}$ $\qquad = \int_0^1 \left(\int_0^u e^{\frac{v}{u}} dv \right) du = \dots$

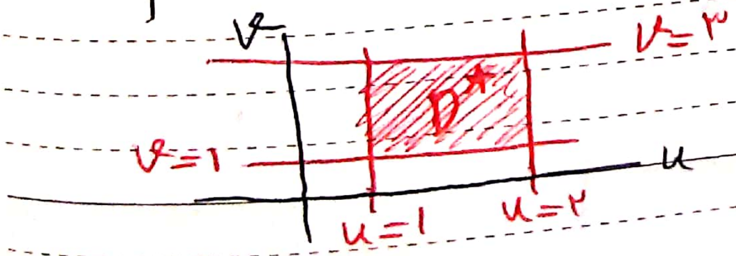
تذکره: تحت مفروضات قضیه قبل می توان ثابت کرد که تابع G وارون پذیر است و u و v نیز توابعی برحسب x و y می باشند و ژاکوبین نیز به روش زیر قابل محاسبه است.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{\det\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}}$$

ب) $\iint_D \frac{x}{y} \, dx\, dy$ — D ناحیه محصور توسط خم های $y = x$ ، $y = 2x$ و $y = \frac{1}{x}$ و $y = \frac{3}{x}$ در ربع اول صفحه.



$$(*) \begin{cases} u = \frac{y}{x} \\ v = yx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = x \Rightarrow u = 1 \\ y = 2x \Rightarrow u = 2 \\ y = \frac{1}{x} \Rightarrow v = 1 \\ y = \frac{3}{x} \Rightarrow v = 3 \end{cases}$$



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ y & x \end{vmatrix}} = \frac{1}{-\frac{y}{x} - \frac{y}{x}} = \frac{1}{-\frac{2y}{x}} = \frac{1}{-2u}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$\Rightarrow \iint_D \frac{x}{y}\,dxdy = \iint_{D^*} \frac{1}{u}\left|\frac{1}{-2u}\right| dudv = \frac{1}{2}\iint_{D^*} \frac{1}{u^2}\,dudv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^3 \left(\int_1^2 \frac{1}{u^2}\,du\right) dv = \frac{1}{2}\int_1^3 \left[\frac{-1}{u}\right]_1^2 dv = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

روش دوم محاسبه‌ی ژاکوبین:

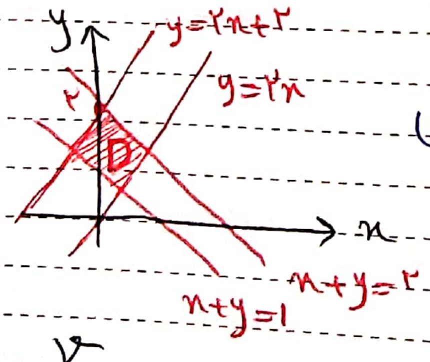
$(*) \Rightarrow y^2 = uv \Rightarrow y = u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}}$

$(*) \Rightarrow x^2 = \frac{v}{u} \Rightarrow x = v^{-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \dots$$

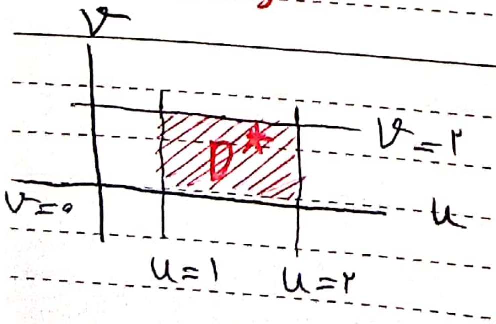
$\iint_D \frac{x}{y}\,dxdy$ ، D ناحیه محصور توسط خم‌های $y^2=x$ ، $x=2y^2$ ، $y=x^2$ و $y=2x^2$ در $\frac{1}{4}$ اول صفحه.

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال $\iint_D (x-y)^2\,dxdy$ که در آن D ناحیه محصور بین خطوط $x+y=1$ ، $x+y=2$ ، $y=2x$ و $y=2x+2$



حل)

$$(*)\begin{cases} u = x+y \\ v = y-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \Rightarrow u=1 \\ x+y=2 \Rightarrow u=2 \\ y=2x \Rightarrow v=0 \\ y=2x+2 \Rightarrow v=2 \end{cases}$$



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{3}$$

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

$(*) \Longrightarrow 3y = 2u + v \Longrightarrow y = \frac{2u+v}{3}$

$(*) \Longrightarrow x = u - y = u - \frac{2u+v}{3} = \frac{u-v}{3}$

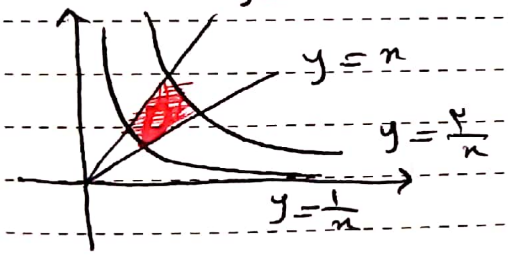
$\Longrightarrow x - y = \frac{u-v}{3} - \frac{2u+v}{3} = \frac{-(u+2v)}{3}$

$$\Longrightarrow \iint_D (x-y)^2\,dx\,dy = \iint_{D^*} \frac{(u+2v)^2}{3^2} \times \frac{1}{3}\,du\,dv$$

طبق فرمول تغییر متغیر

$$= \frac{1}{27}\int_1^2 \left(\int_0^2 (u+2v)^2\,dv\right) du = \dots \qquad D^* = \begin{cases} 1 \le u \le 2 \\ 0 \le v \le 2 \end{cases}$$

تمرین: مطلوب است محاسبه مساحت ناحیه محصور توسط خم های $y=\frac{1}{x}$ و $y=\frac{2}{x}$ و خطوط $y=x$ و $y=2x$ در ربع اول صفحه.



$$D \text{ مساحت} = \iint_D \underbrace{dx\,dy}_{dA} = \dots\dots$$

* تغییر متغیر قطبی در انتگرال های دوگانه:

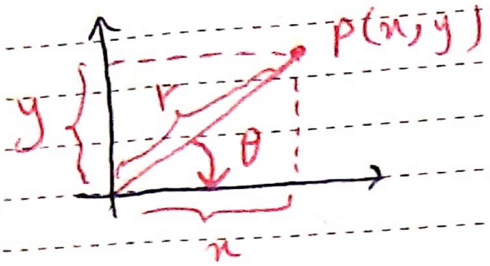
برای نمایش یک نقطه مانند P در صفحه دکارتی علاوه بر مختصات دکارتی از روش دیگری به شرح زیر می توان استفاده کرد.

فرض کنیم r فاصله نقطه P تا مبدأ مختصات بوده و θ زاویه بین شعاع ایجاد شده توسط این نقطه و جهت مثبت محور x باشد.

در این صورت دو مختصه r و θ به طور منحصر به فرد نقطه P را در صفحه مشخص می کند در این حالت مختصات (r, θ) را مختصات قطبی نقطه P گویند. r را فاصله قطبی

آن پیک نامور که رسید از دیار دوست / آورد حرز جان ز خط مشکبار دوست
خوش می‌دهد نشان جلال و جمال یار / خوش می‌کند حکایت عز و وقار دوست
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

و θ را زاویه قطبی می‌نامیم.



$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

$$r=\sqrt{x^2+y^2} \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

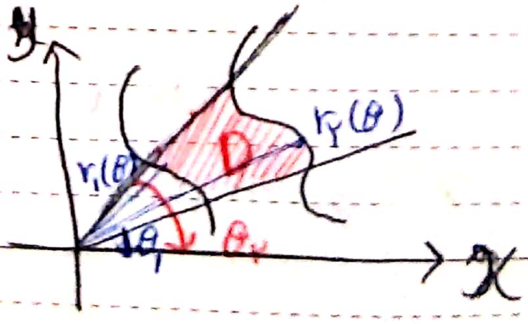
اگر p دارای مختصات دکارتی (x,y) و مختصات قطبی (r,θ) باشد آنگاه با توجه به روابط بالا $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ ، در این حالت تغییر متغیر $x(r,\theta)=r\cos\theta$ و $y(r,\theta)=r\sin\theta$ را تغییر متغیر قطبی نامیده و ژاکوبین تغییر متغیر برابر است با:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

تذکر: برای استفاده از تغییر متغیر قطبی در محاسبه $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ با توجه به اینکه متغیرهای قطبی r و θ در صفحه xoy قابل نمایش هستند. بنابراین نیازی به رسم شکل جدید (شکل D^*) در صفحه $r o\theta$ نیست. در واقع حدود r و θ را می‌توان از همان ناحیه D بدست آورد و انتگرال را به صورت زیر محاسبه کرد

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$$

دکارتی ← (سمت چپ) قطبی ← (سمت راست)

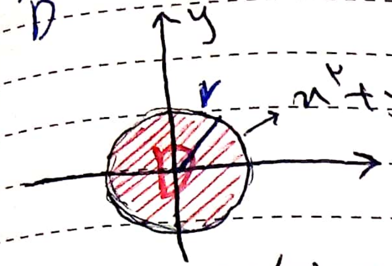


D در مختصات قطبی ، $\begin{cases} \theta_1 \le \theta \le \theta_2 \\ r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta) \end{cases}$

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مثال)

$\iint_D (1+xy)\,dx\,dy$ ، D ناحیه محصور توسط دایره‌ی $x^2+y^2=1$



$x^2+y^2=1$ یا $r^2=1 \Rightarrow r=1$

D در مختصات قطبی $= \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \iint_D (1+xy)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 (1+r^2\sin\theta\cos\theta)\,r\,dr\right)d\theta$$

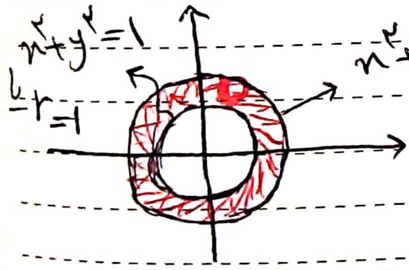
تغییر متغیر قطبی

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4}\cos\theta\sin\theta\right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi}\left(\frac12 + \frac14 \underbrace{\sin\theta\cos\theta}_{\frac12\sin2\theta}\right)d\theta$$

$$= \frac12\theta + \frac14 \times -\frac14\cos2\theta\Big]_0^{2\pi} = \pi - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \boxed{\pi}$$

@jozve_iut

$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = I$ ، D ناحیه محصور توسط دو دایره $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=2$.



$x^2+y^2=2$ یا $r=\sqrt2$

D در مختصات قطبی $= \begin{cases} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 1 \le r \le \sqrt2 \end{cases}$

$$I = \int_0^{2\pi}\left(\int_1^{\sqrt2} \frac{1}{1+r^2}\,r\,dr\right)d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_1^{\sqrt2}\frac{r}{1+r^2}\,dr\right)$$

$$= (2\pi)\times\frac12 \ln|\underbrace{1+r^2}_{\ge 1}|\Big]_1^{\sqrt2} = \pi(\ln3 - \ln2) = \boxed{\pi\ln\frac32}$$

$\iint_D \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy$ ، D ناحیه محصور توسط دایره $x^2+y^2=4$ در ناحیه $x \ge |y|$

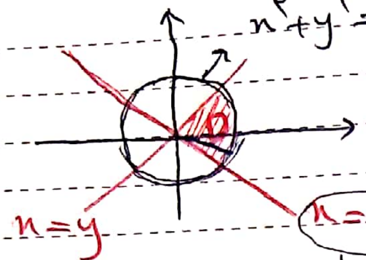
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$\int \cos\theta \sin^2\theta \, d\theta = \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C$$

$u = \sin\theta$

$du = \cos\theta \, d\theta \Longrightarrow d\theta = \frac{du}{\cos\theta}$

$x^2+y^2=4$ یا $r=2$



D در مختصات قطبی $= \begin{cases} -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq r \leq 2 \end{cases}$

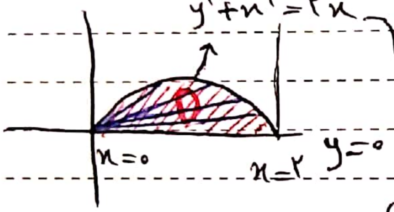
$r\cos\theta = -r\sin\theta$

$\tan\theta = -1$

$$\int \sqrt{1+r^2} \, r\,dr = \frac{1}{3}(1+r^2)^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, dy\, dx = I$$

D به عنوان y-ساده $= \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} \end{cases}$



$y = \sqrt{2x-x^2} \Rightarrow y^2+x^2 = 2x \Longleftrightarrow y^2+(x-1)^2 = 1$

$r^2 = 2r\cos\theta$

$\Longrightarrow r = 2\cos\theta$

D در مختصات قطبی $= \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq r \leq 2\cos\theta \end{cases}$

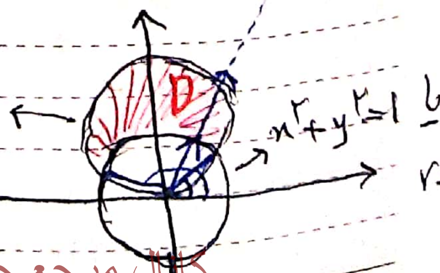
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r \times r \, dr\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r^3}{3}\Big]_0^{2\cos\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{8}{3}\cos^3\theta \, d\theta$$

$$= \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta(1-\sin^2\theta)\, d\theta = \frac{8}{3}\left(\sin\theta - \frac{\sin^3\theta}{3}\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \dots$$

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی مساحت هر یک از نواحی زیر

الف) ناحیه خارج دایره $x^2+y^2=1$ و درون دایره $x^2+y^2=2y$

$x^2+y^2 = 2y \Longleftrightarrow x^2+(y-1)^2 = 1$



$x^2+y^2=2y$

یا $x^2+y^2=1$

$r=1$

$r = 2\sin\theta \Longleftarrow r^2 = 2r\sin\theta$

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$\int \sin^2\theta \, d\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta$

D در مختصات قطبی $= \begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \pi - \frac{\pi}{6} \\ 1 \leq r \leq 2\sin\theta \end{cases}$

محل برخورد دو منحنی (برای بدست آوردن θ): $1 = 2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_1 = \pi/6 \quad \theta_2 = \pi - \frac{\pi}{6}$

مساحت ناحیه $D = \iint_D dx\,dy = \iint_{D \text{ قطبی}} r\,dr\,d\theta$

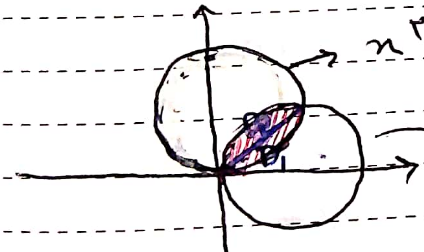
$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi-\frac{\pi}{6}} \int_1^{2\sin\theta} r\,dr\,d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi-\pi/6} \frac{r^2}{2}\Big]_1^{2\sin\theta} d\theta$

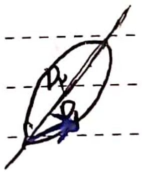
$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi-\pi/6} \left(\frac{4}{2}\sin^2\theta - \frac{1}{2}\right) d\theta$

$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi-\pi/6} \left(1-\cos 2\theta - \frac{1}{2}\right) d\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\pi-\frac{\pi}{6}} = \ldots\ldots$

ب) ناحیه محصور بین دوایر $x^2+y^2=2y$ و $x^2+y^2=2x$

حل)





مساحت $D = \iint_D dx\,dy$ مساحت $D = 2$ مساحت $D_1 = 2\iint_D dx\,dy$

D_1 در مختصات $= \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \\ 0 \leq r \leq 2\sin\theta \end{cases}$

محل برخورد دو سطح برای بدست آوردن θ: $r_1 = r_2 \Rightarrow 2\sin\theta = 2\cos\theta$

$\tan\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

مرزی که وارد می‌شود ۲ ورودی و مرزی که خارج می‌شود ۲ خروجی

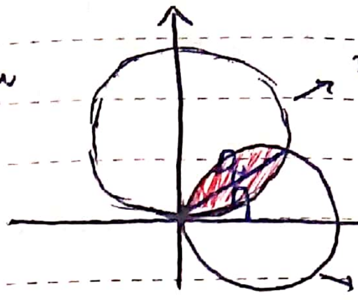
مساحت $D = 2\iint_{D_1} dx\,dy = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sin\theta} r\,dr\,d\theta \ldots$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

تمرین: مساحت ناحیه محصور توسط دایره‌های $x^2+y^2=2x$ و $x^2+y^2=2\sqrt{3}y$ را بدست آورید.

$x^2+y^2=2x \Longrightarrow (x-1)^2+y^2=1$

$x^2+y^2=2\sqrt{3}y \Longrightarrow x^2+(y-\sqrt{3})=3$



D مساحت $=\iint_D dA=\iint_{D_1} dA+\iint_{D_2} dA$

محل برخورد دو منحنی = θ بدست می‌آید.

تمرین: مطلوب است محاسبه‌ی انتگرال دوگانه زیر

$$\int_0^1\int_{-y}^{y}\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dx\,dy+\int_{-1}^{1}\int_{1}^{\sqrt{2-x^2}}\frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\,dy\,dx$$

$$D_1=\begin{cases}-y\leq x\leq y\\ 0\leq y\leq 1\end{cases}\qquad D_2=\begin{cases}-1\leq x\leq 1\\ 1\leq y\leq \sqrt{2-x^2}\end{cases}$$

انتگرال سه‌گانه:

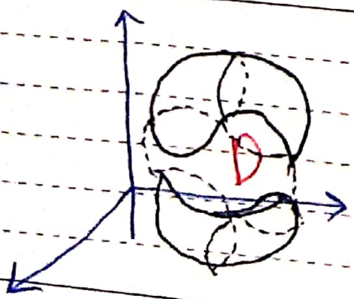
فرض کنید $D\subseteq \mathbb{R}^3$ ناحیه‌ای بسته و کراندار باشد.

برای افراز $P=\{\Delta D_1,\dots,\Delta D_n\}$ از ناحیه D به نواحی کوچکتر و برای هر $i=1,\dots,n$ قرار می‌دهیم:

$\Delta V_i=\Delta D_i$ حجم ناحیه

$d(\Delta D_i)=\Delta D_i$ قطر ناحیه

نرم افراز $=\|P\|=\max\{d(\Delta D_1),\dots,d(\Delta D_n)\}$



اگر $f:D\to\mathbb{R}$ تابعی کراندار باشد.

با انتخاب نقاط $p_1\in\Delta D_1,\dots,p_n\in\Delta D_n$

عبارت $\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta V_i$ را

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

حاصل جمع ریمان تابع f به ازای افراز P نامیده و با نماد $S(f,P)$ نمایش می‌دهیم. با میل دادن $\|P\|$ به سمت صفر، اگر $\lim_{\|P\|\to 0} S(f,P)$ وجود داشته باشد، آنگاه f را بر D انتگرال‌پذیر نامیده و حاصل حد فوق را با یکی از نمادهای $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ یا $\iiint_D f\,dV$ نمایش می‌دهیم. یعنی:

$$\iiint_D f\,dV = \lim_{\|P\|\to 0} S(f,P)$$

به عنوان مثال اگر $f:D\to\mathbb{R}$ تابع ثابت $f(x,y,z)=1$ باشد، به راحتی می‌توان مشاهده کرد که

$$\iiint_D 1\,dV = \text{حجم ناحیه } D$$

در واقع این حالت تنها حالتی است که انتگرال سه‌گانه دارای تعبیر هندسی است.

تذکر: همه‌ی خواص عمومی انتگرال دوگانه برای انتگرال سه‌گانه نیز برقرار است. به عنوان مثال اگر f تابعی انتگرال‌پذیر بر نواحی D_1 و D_2 باشد و D_1 و D_2 حداکثر در مرزهای خود اشتراک داشته باشند (اشتراکشان حجم تولید نکند) آنگاه:

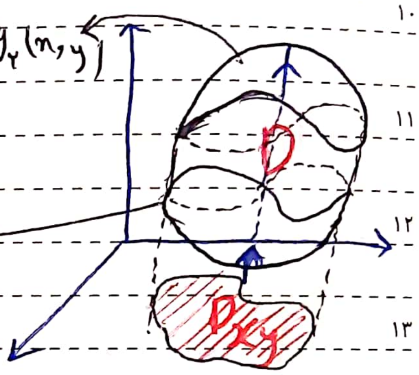
$$\iiint_{D_1\cup D_2} f\,dV = \iiint_{D_1} f\,dV + \iiint_{D_2} f\,dV$$

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

محاسبه‌ی انتگرال سه‌گانه (ادامه)

۱- ناحیه z - ساده: ناحیه بسته و کراندار $D \subseteq \mathbb{R}^3$ را z - ساده نامیم هرگاه ناحیه بسته و کراندار $D_{xy} \subseteq \mathbb{R}^2$ و توابع $g_1, g_2 : D_{xy} \to \mathbb{R}$ با شرط $g_1(x,y) \leq g_2(x,y)$ وجود داشته باشند که

$$(x,y,z) \in D \iff \begin{cases} (x,y) \in D_{xy} \\ g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y) \end{cases}$$



در این حالت اگر $f : D \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد می‌توان نشان داد که

$$\iiint_D f\,dV = \iint_{D_{xy}} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dx\,dy$$

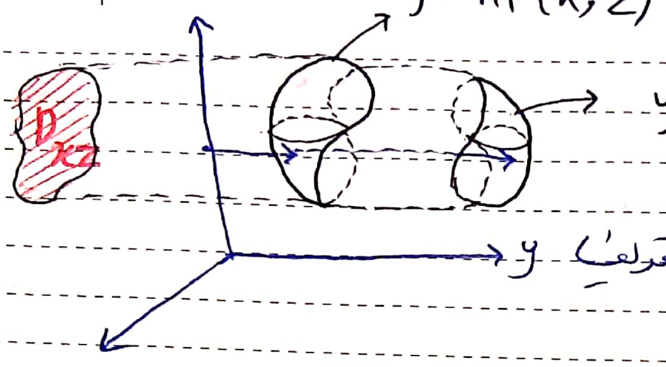
۲- ناحیه y - ساده: ناحیه بسته و کراندار $D \subseteq \mathbb{R}^3$ را y - ساده نامیم، هرگاه ناحیه بسته و کراندار $D_{xz} \subseteq \mathbb{R}^2$ و توابع $h_1, h_2 : D_{xz} \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشند که

$$(x,y,z) \in D \iff \begin{cases} (x,z) \in D_{xz} \\ h_1(x,z) \leq y \leq h_2(x,z) \end{cases}$$

در این حالت می‌توان نشان داد که اگر $f : D \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد.

$$\iiint_D f\,dV = \iint_{D_{xz}} \left(\int_{h_1(x,z)}^{h_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right) dx\,dz$$

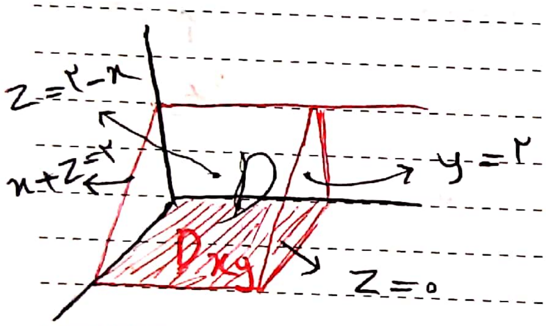
هرچه هست پرتو روی حبیب است
عشق خانقاه و خرابات فرق نیست
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان



ناحیه x-ساده به طور مشابه تعریف می‌شود.

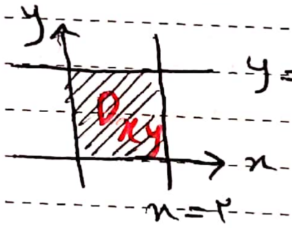
مثال) مطلوب است هریک از انتگرال‌های زیر:

الف) $\iiint_D (z-xy)\,dV = I$ ، D ناحیه محصور توسط صفحه $x+z=2$ و $y=2$ و صفحات مختصات



$$D = \begin{cases} (x,y) \in D_{xy} \\ 0 \leq z \leq 2-x \end{cases}$$

D به عنوان z-ساده



$$I = \iint_{D_{xy}} \left(\int_0^{2-x} (z-xy)\,dz \right) dx\,dy$$

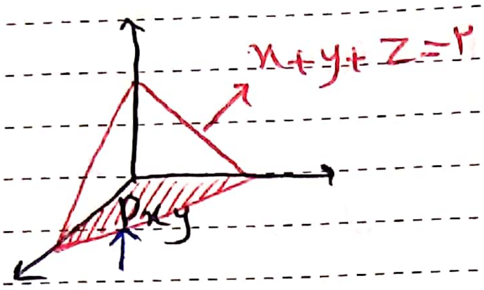
$$= \iint_{D_{xy}} \left(\frac{z^2}{2} - xyz \right) \Big]_0^{2-x} dx\,dy = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{(2-x)^2}{2} - xy(2-x) \right) dx\,dy$$

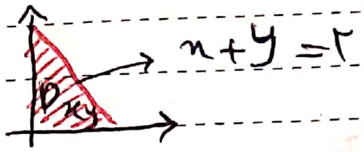
$$= \int_0^2 \left(\int_0^2 \frac{(2-x)^2}{2} - xy(2-x)\,dx \right) dy = \ldots\ldots$$

@jozve_iut

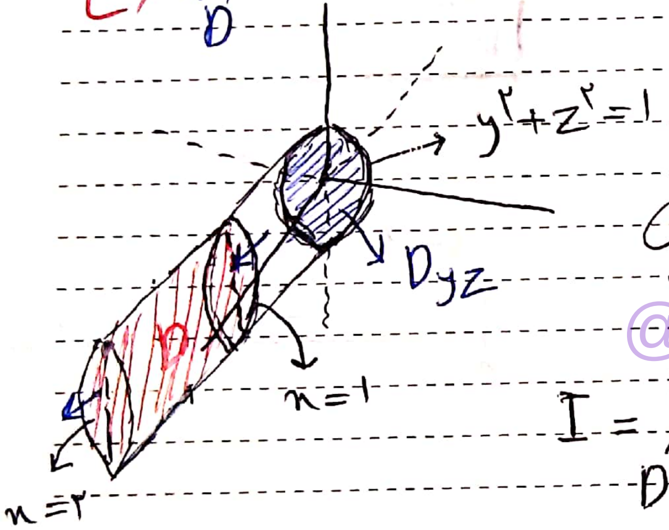
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

الف) $\iiint_D x\,dV$ D ناحیه محصور توسط صفحات مختصات و صفحه $x+y+z=2$.





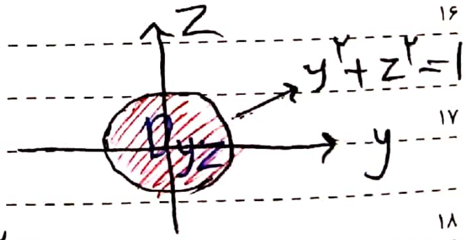
ج) $\iiint_D \sin\pi(y^2+z^2)\,dV = I$ D ناحیه محصور توسط استوانه $y^2+z^2=1$ بین صفحات $x=1$ و $x=2$ می‌باشد.



D به عنوان x-ساده $= \begin{cases} (x,z)\in D_{yz} \\ 1\leq x\leq 2 \end{cases}$

$$I=\iint_{D_{yz}}\left(\int_1^2 \sin\pi(z^2+y^2)\,dx\right)dy\,dz$$

$$=\iint_{D_{yz}} \sin\pi(z^2+y^2)\,dy\,dz$$



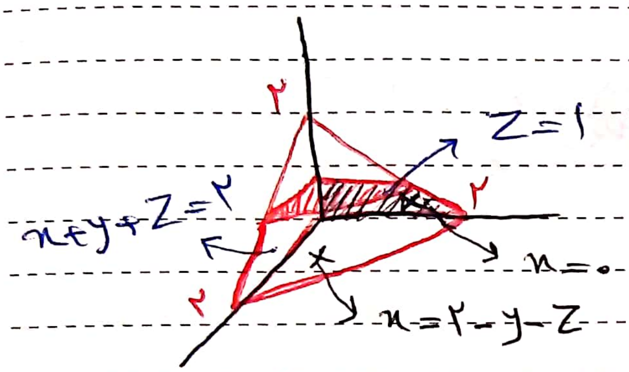
D_{yz} به عنوان قطبی $= \begin{cases} 0\leq\theta\leq 2\pi \\ 0\leq r\leq 1 \end{cases}$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^1 \sin(\pi r^2)\times r\,dr\,d\theta=\int_0^{2\pi}\left.\frac{-1}{2\pi}\cos(\pi r^2)\right]_0^1 d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{1}{\pi}\,d\theta=2\pi\times\frac{1}{\pi}=2$$

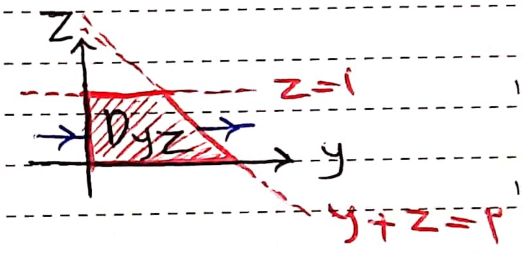
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

د) $\iiint_D x\,dV = I$ ، D ناحیه محصور توسط صفحه‌ی $x+y+z=2$ و صفحات مختصات در ناحیه $z \le 1$



$$D = \begin{cases} (y,z) \in D_{yz} \\ 0 \le x \le 2-y-z \end{cases}$$

D به عنوان ساده x



$$I = \iint_{D_{yz}} \left(\int_0^{2-y-z} x\,dx \right) dy\,dz$$

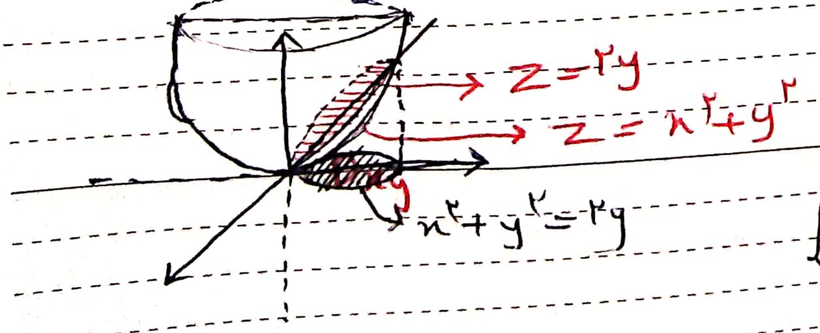
$$= \iint_{D_{yz}} \frac{(2-y-z)^2}{2}\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{2-z} \frac{(2-y-z)^2}{2}\,dy \right) dz = \dots$$

D_{yz} به عنوان ساده y

$$D_{yz} = \begin{cases} 0 \le z \le 1 \\ 0 \le y \le 2-z \end{cases}$$

مثال: مطلوب است محاسبه حجم هر یک از نواحی زیر:

الف) حجم ناحیه بین سهمی‌گون $z = x^2+y^2$ و صفحه $z = 2y$



$$\begin{cases} z = 2y \\ z = x^2+y^2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = 2y$$

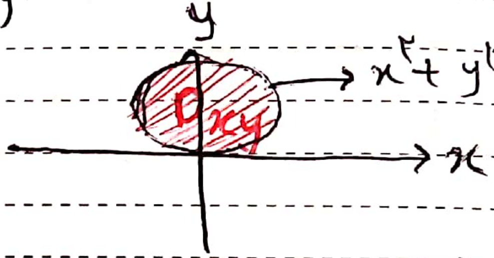
@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

D به عنوان z-ساده $= \begin{cases} (x,y) \in D_{xy} \\ x^2+y^2 \leq z \leq 2y \end{cases}$

حجم ناحیه D $= \iiint_D dV = \iint_{D_{xy}} \left(\int_{x^2+y^2}^{2y} dz \right) dx\,dy$

$= \iint_{D_{xy}} 2y - (x^2+y^2)\, dx\,dy$



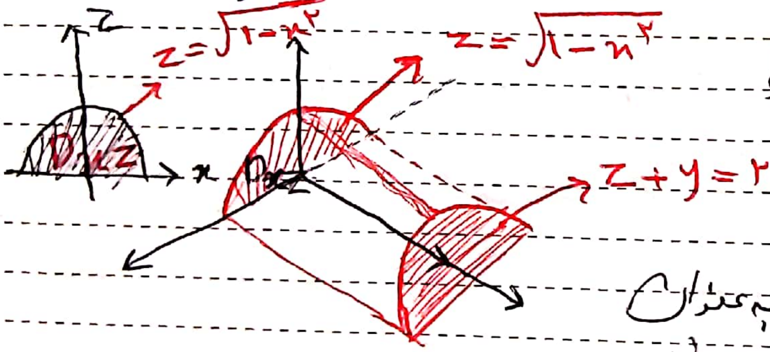
$\to x^2+y^2=2y$ یا $r = 2\sin\theta$

$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} (2r\sin\theta - r^2)\, r\,dr\,d\theta = \ldots$ به عنوان D_{xy} ناحیه قطبی $= \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 2\sin\theta \end{cases}$

@jozve_iut

ب) حجم محصور توسط رویه $z=\sqrt{1-x^2}$ و صفحات $y+z=2$ و $z=0$ ، $y=0$

رویه هایی که یک متغیر را ندارند استوانه ای می شوند.



D به عنوان y-ساده $= \begin{cases} (x,z) \in D_{xz} \\ 0 \leq y \leq 2-z \end{cases}$

حجم D $= \iiint_D dV = \iint_{D_{xz}} \left(\int_0^{2-z} dy \right) dx\,dz = \iint_{D_{xz}} 2-z\, dx\,dz$

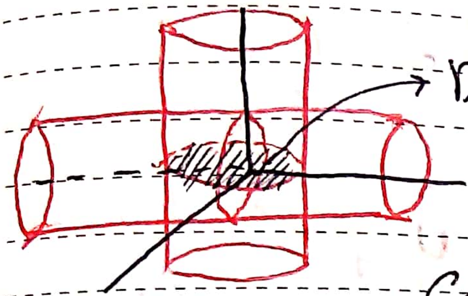
در سیستم قطبی $D_{xz} = \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{cases}$ $= \int_0^{\pi} \int_0^{1} (2 - r\sin\theta)\, r\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{\pi} \left[r^2 - \frac{r^3}{3}\sin\theta \right]_0^1 d\theta = \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{1}{3}\sin\theta\right) d\theta$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$= \theta + \frac{1}{3}\cos\theta \Big]_0^{\pi} = \pi - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \pi - \frac{2}{3}$$

ج) حجم محصور بین دو استوانه $x^2+y^2=1$ و $x^2+z^2=1$



D_{xy}

D به عنوان ناحیه ساده z:

$$D = \begin{cases} (x,y)\in D_{xy} \\ -\sqrt{1-x^2}\le z \le \sqrt{1-x^2} \end{cases}$$

D_{xy} به عنوان ناحیه ساده y:

$$D_{xy} = \begin{cases} -\sqrt{1-x^2}\le y \le \sqrt{1-x^2} \\ -1\le x\le 1 \end{cases}$$

تغییر متغیر در انتگرال های سه گانه 8

فرض کنیم $D^*\subseteq \mathbb{R}^3$ ناحیه ای بسته و کراندار از فضای متغیرهای u و v و w باشد و توابع $x=x(u,v,w)$ و $y=y(u,v,w)$ و $z=z(u,v,w)$ توابعی با مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته بر ناحیه D^* باشند. به علاوه فرض کنیم تابع $G: D^*\to\mathbb{R}^3$ با ضابطه $G(u,v,w)=(x(u,v,w), y(\dots), z(\dots))$ در نقاط درونی D^* یک به یک بوده و

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{pmatrix} \neq 0$$

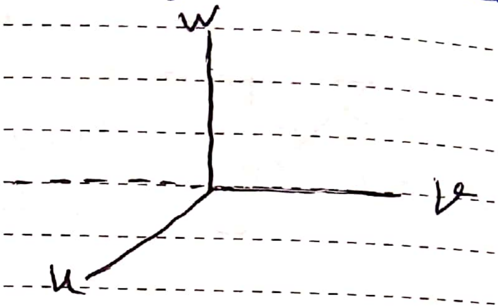
اگر قرار دهیم $D=G(D^*)$ و $f: D\to\mathbb{R}$ تابعی پیوسته باشد آنگاه

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} f(x(u,v,w), y(\dots), z(\dots)) \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| du\,dv\,dw$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی $\iiint_D z\,dV$ که در آن D ناحیه محصور بین صفحات $x+y=-1, 3$ و $x+z=-1, 2$ و $y+z=0, 2$

$$* \begin{cases} u = x+y \\ v = x+z \\ w = y+z \end{cases} \Longrightarrow D^* = \begin{cases} -1 \leq u \leq 3 \\ -1 \leq v \leq 2 \\ 0 \leq w \leq 2 \end{cases}$$



$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{-1-1+0} = \frac{-1}{2}$$

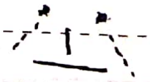
$$* \Longrightarrow v+w = 2z + \underbrace{(x+y)}_{u} \Longrightarrow z = \frac{v+w-u}{2}$$

$$\Longrightarrow \iiint_D z\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D^*} \frac{v+w-u}{2} \times \left|-\frac{1}{2}\right| du\,dv\,dw$$

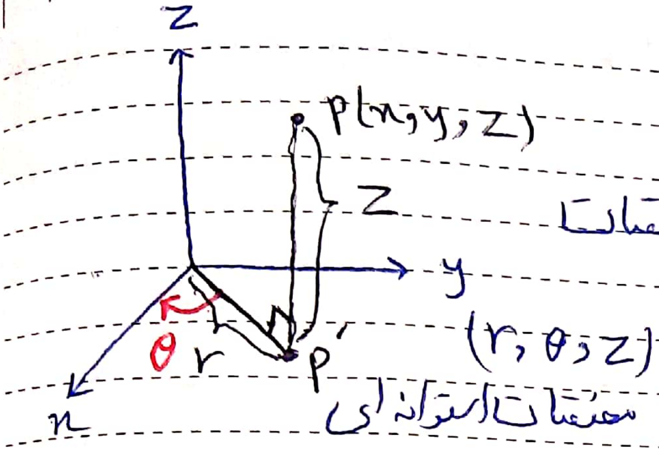
$$= \int_0^2\left(\int_{-1}^2\left(\int_{-1}^3 \frac{v+w-u}{4}\,du\right)dv\right)dw = \ldots\ldots$$

تمرین: مطلوب است تعیین حجم ناحیه محصور توسط بیضی گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

$$\begin{cases} u = \frac{x}{a} \\ v = \frac{y}{b} \\ w = \frac{z}{c} \end{cases}$$

راهنمایی:  بچه داره گریه می‌کنه

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان



تغییر متغیر استوانه‌ای:

فرض کنیم p نقطه‌ای در فضای دکارتی با مختصات دکارتی (x,y,z) بوده و p′ تصویر این نقطه در صفحه xoy باشد. اگر p′ در صفحه xoy، دارای مختصات قطبی (r,θ) باشد آنگاه سه‌تایی (r,θ,z) به‌طور منحصربه‌فرد نقطه p را در فضا مشخص می‌کند. نمایش نقاط فضا به روش فوق را سیستم مختصات استوانه‌ای می‌نامیم. بدین ترتیب تغییر متغیر را تغییر متغیر استوانه‌ای نامیده و در این تغییر متغیر

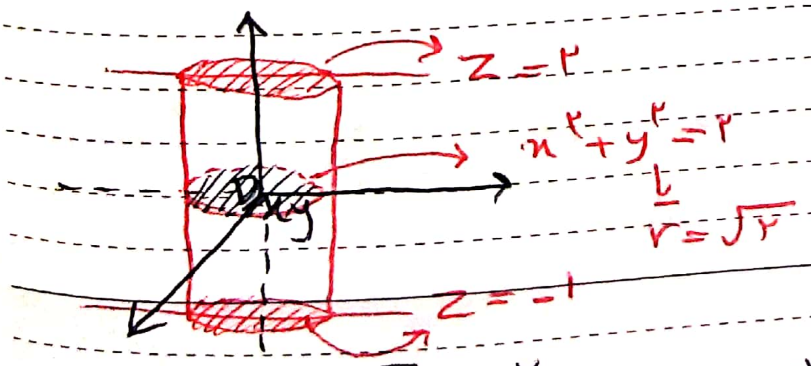
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

@jozve_iut

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$$

مثال) مطلوب است محاسبه هریک از انتگرال‌های زیر:

الف) $\iiint_D \sqrt{x^2+y^2}\, dx\,dy\,dz = I$ ، D ناحیه درون استوانه $x^2+y^2=2$ بین صفحات $z=-1$ و $z=2$.



D در سیستم استوانه‌ای =
$$\begin{cases} -1 \le z \le 2 \\ 0 \le r \le \sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

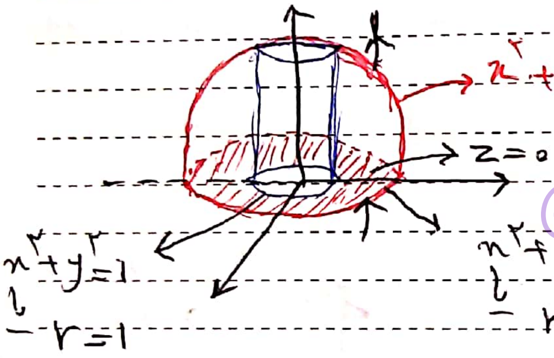
$$I = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-1}^{2} r \times r\, dz \right) dr\, d\theta$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$= \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)}_{2\pi}\underbrace{\left(\int_0^{\sqrt{2}} r^2\,dr\right)}_{\frac{2^{\frac{3}{2}}}{3}}\underbrace{\left(\int_{-1}^{2} dz\right)}_{3} = 4\pi\sqrt{2}$$

$$\int_a^b\int_c^d f(x)\,g(y)\,dy\,dx = \left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$$

ب) $I=\iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dV$ ، D ناحیه محصور توسط کره $x^2+y^2+z^2=2$ و بالای صفحه $z=0$ و خارج استوانه $x^2+y^2=1$



$x^2+y^2+z^2=2 \Leftrightarrow z=\sqrt{2-(x^2+y^2)}$ یا $z=\sqrt{2-r^2}$

$x^2+y^2=2$ یا $r=\sqrt{2}$

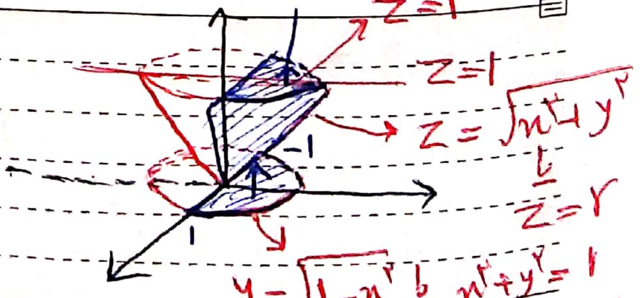
D در دستگاه استوانه‌ای $=\begin{cases} 0\le z\le \sqrt{2-r^2} \\ 1\le r\le \sqrt{2} \\ 0\le \theta\le 2\pi \end{cases}$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_1^{\sqrt{2}}\int_0^{\sqrt{2-r^2}} \frac{z}{r}\times r\,dz\,dr\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{2-r^2}{2}\,dr\,d\theta = 2\pi\int_0^{\sqrt{2}}\frac{2-r^2}{2}\,dr = \ldots\ldots$$

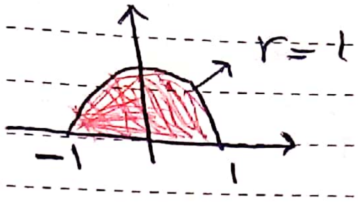
ج) $\int_{-1}^{1}\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dz\,dy\,dx = I$

D به عنوان Z-ساده) $D=\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1 \\ 0\le y\le \sqrt{1-x^2} \\ -1\le x\le 1 \end{cases}$



@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

D در سیستم مختصات استوانه‌ای $= \begin{cases} r \leq z \leq 1 \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$

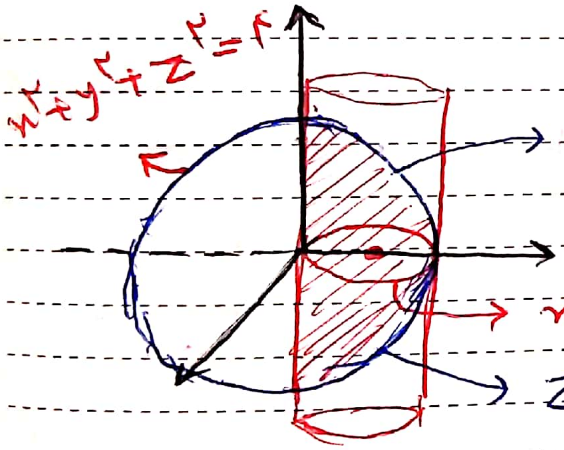


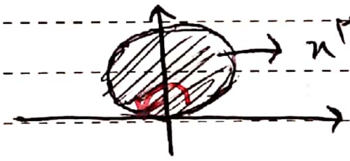
$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{1} \left(\int_r^{1} \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \, r \, dz \right) dr \, d\theta = \ldots\ldots$$

$$z = r\tan\theta \Longrightarrow dz = r\sec^2\theta \, d\theta$$

اگر در صورت انتگرال به جای z^2 ، z باشد آسون تره :)

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی حجم ناحیه محصور درون استوانه‌ی $x^2+y^2=2y$
محدود شده توسط کره‌ی $x^2+y^2+z^2=4$.





D در سیستم استوانه‌ای $= \begin{cases} -\sqrt{4-r^2} \leq z \leq \sqrt{4-r^2} \\ 0 \leq r \leq 2\sin\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$

$V =$ حجم $D = \iiint_D dV$

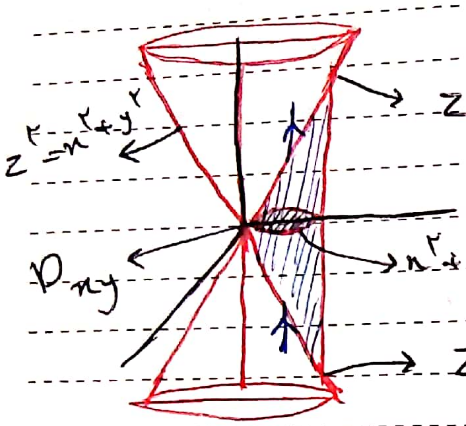
$$\Longrightarrow V = \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \int_0^{2\sin\theta} 2r\sqrt{4-r^2} \, dr \, d\theta = \int_0^{\pi} \left[-\frac{2}{3} (4-r^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2\sin\theta} d\theta$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوه دانشگاه صنعتی اصفهان

$$= \int_0^{\pi} \left(-\frac{2}{3}\left(4-4\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{16}{3} \right) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{-16}{3}\left(\cos^3\theta - 1\right) d\theta = \dots$$

مثال) مطلوب است تعیین حجم محصور درون استوانهٔ $x^2+y^2=2y$ محدود شده توسط مخروط $z^2=x^2+y^2$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$ یا $z=r$

$x^2+y^2=2y$ یا $r=2\sin\theta$

$z=-\sqrt{x^2+y^2}$ یا $z=-r$

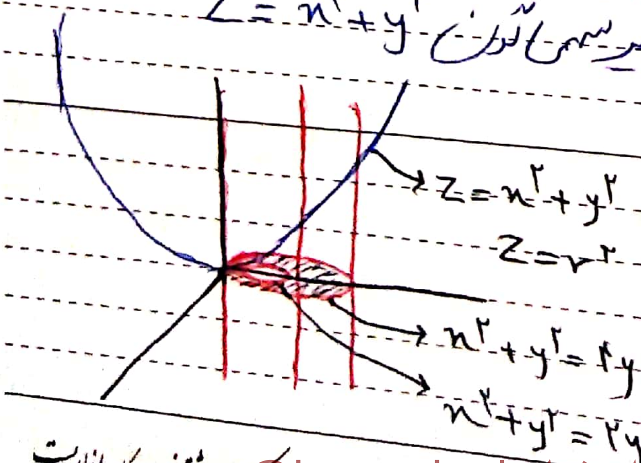
$$V = \text{حجم ناحیه } D = \iiint_D dV$$

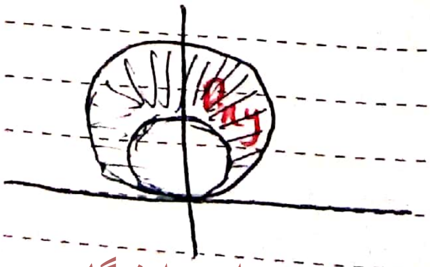
در سیستم استوانه‌ای
$$D = \begin{cases} -r \leq z \leq r \\ 0 \leq r \leq 2\sin\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \Rightarrow V = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta}\int_{-r}^{r} r\,dz\,dr\,d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} 2r^2\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \frac{2}{3}\times 2^3 \sin^3\theta\, d\theta = \frac{16}{3}\int_0^{\pi} \sin\theta\left(1-\cos^2\theta\right) d\theta$$

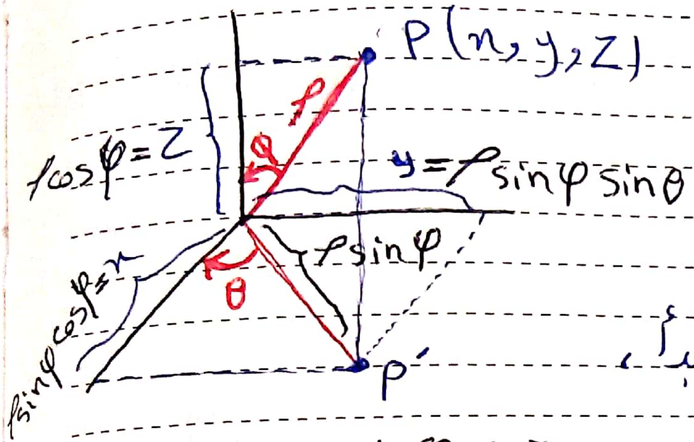
$$= \frac{16}{3}\left(-\cos\theta + \frac{\cos^3\theta}{3}\right)\Big]_0^{\pi} = \frac{16\times 4}{9}$$

تمرین: مطلوب است تعیین حجم ناحیه بین استوانه‌های $x^2+y^2=2y$ و $x^2+y^2=4y$ بالای صفحه xoy و زیر سهمی‌گون $z=x^2+y^2$





@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان



تغییر متغیر کروی:

فرض کنیم P نقطه‌ای در فضای دکارتی با مختصات دکارتی (x,y,z) باشد.

همچنین فرض کنیم ρ فاصله این نقطه تا مبدأ،

φ زاویه بین شعاع حاصل از این نقطه و جهت مثبت محور z و θ زاویه بین شعاع حاصل از P' (تصویر نقطه P در صفحه xoy) و جهت مثبت محور x باشد، در این صورت سه تایی (ρ, φ, θ) به صورت منحصر به فرد وضعیت نقطه P را در فضا مشخص می‌کند. نمایش نقاط فضا به روش فوق را سیستم مختصات کروی می‌نامیم.

$\rho \geq 0 \qquad 0 \leq \varphi \leq \pi$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$ یا $-\pi \leq \theta \leq \pi$

$$\sqrt{x^2+y^2} = \rho \sin\varphi \qquad x^2+y^2+z^2 = \rho^2$$

با توجه به توضیحات بالا اگر P دارای مختصات دکارتی (x,y,z) و مختصات کروی (ρ,φ,θ) باشد آنگاه $x = \rho \sin\varphi \cos\theta$ و $y = \rho \sin\varphi \sin\theta$ و $z = \rho \cos\varphi$، بر این اساس تغییر متغیر فوق را تغییر متغیر کروی می‌نامیم.

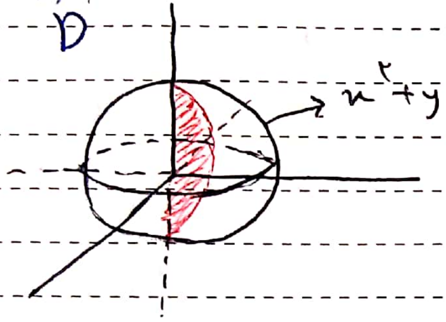
در این حالت

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,\theta)} = \rho^2 \sin\varphi$$

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

سوال) مطلوب است محاسبه هر یک از انتگرال های زیر:

الف) $\iiint_D x\,dx\,dy\,dz = I$ ناحیه D محصور توسط $x^2+y^2+z^2=1$

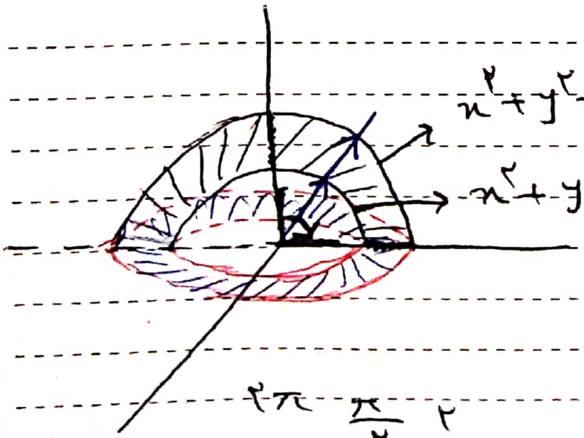


$D=$ در سیستم کروی $\begin{cases} 0\leq\rho\leq 1 \\ 0\leq\varphi\leq\pi \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases}$

$$\Rightarrow I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1}\rho\sin\varphi\cos\theta\times\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\right)\left(\int_0^{\pi}\sin^2\varphi\,d\varphi\right)\left(\int_0^{1}\rho^3 d\rho\right)=0$$

ب) $\iiint_D \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\,dv = I$ ناحیه D بین دو کره $x^2+y^2+z^2=1$ و $x^2+y^2+z^2=4$ در نیم فضای $z\geq 0$



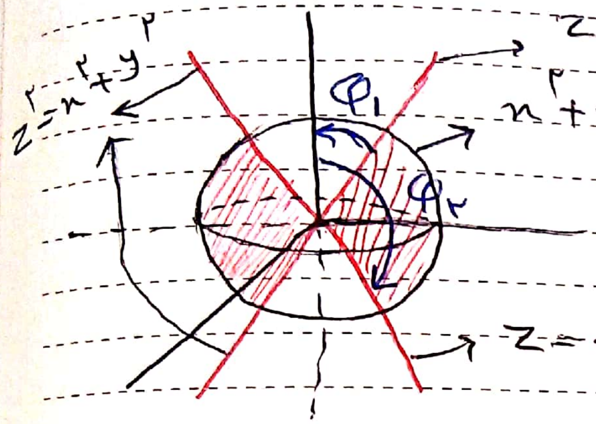
$D=$ در سیستم کروی $\begin{cases} 1\leq\rho\leq 2 \\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2} \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases}$

$$I=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_1^{2}\frac{1}{\rho^2}\rho^2\sin\varphi\,d\rho\,d\varphi\,d\theta$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}d\theta\right)\left(\int_1^{2}d\rho\right)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,d\varphi\right)=\boxed{2\pi}$$

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

ج) $I = \iiint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dV$ ، D ناحیه خارج مخروط $z^2=x^2+y^2$ درون کره $x^2+y^2+z^2=4$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$

$x^2+y^2+z^2=4$ یا $\rho=2$

$z=\rho\cos\varphi=\rho\sin\varphi_1$

$\Rightarrow \tan\varphi_1=1$

$\boxed{\varphi_1=\frac{\pi}{4}}$

$z=-\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \tan\varphi=-1$

$\varphi=\pi-\frac{\pi}{4}$

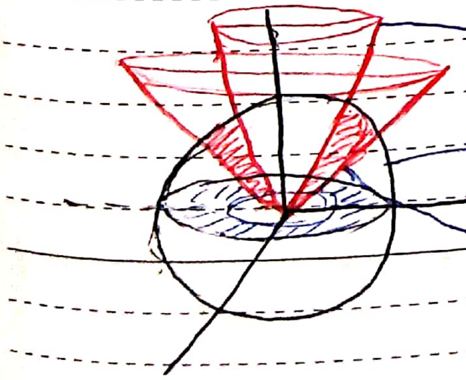
D در سیستم کروی $= \begin{cases} 0\leq\rho\leq 2 \\ \frac{\pi}{4}\leq\varphi\leq\pi-\frac{\pi}{4} \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases}$

$I=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi-\frac{\pi}{4}}\int_0^2 \frac{\rho^2\sin\varphi}{\rho\sin\varphi}\, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

$=\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi-\frac{\pi}{4}} d\varphi\right)\left(\int_0^2 \rho\, d\rho\right)=\boxed{2\pi^2}$

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی حجم هریک از نواحی زیر:

الف) حجم بین دو مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ و $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ درون کره $x^2+y^2+z^2=1$



$z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$ یا $\tan\varphi=\frac{1}{\sqrt3} \Rightarrow \boxed{\varphi=\frac{\pi}{6}}$

$x^2+y^2+z^2=1$ یا $\rho=1$

$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \tan\varphi=1 \Rightarrow \boxed{\varphi=\frac{\pi}{4}}$

D در سیستم کروی $= \begin{cases} 0\leq\rho\leq 1 \\ \frac{\pi}{6}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4} \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases}$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$\text{حجم} = \iiint_D dV = \int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_0^1 \rho^2 \sin\varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin\varphi \, d\varphi\right)\left(\int_0^1 \rho^2 d\rho\right) = \dots$$

ب) حجم خارج کره $x^2+y^2+z^2=1$ درون کره $x^2+y^2+z^2=2z$ (تمرین)

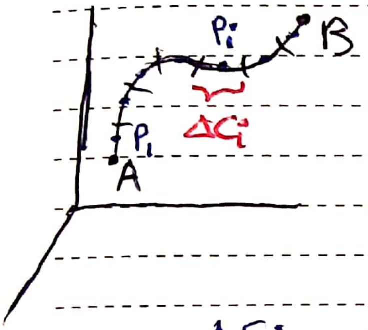
@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

فصل سوم: آنالیز برداری:

- انتگرال خط یا انتگرال بر روی مسیر:

۱) انتگرال خط نوع اول (میدان های اسکالر): فرض کنیم C قطعه ای از یک خم پیوسته در فضا بین دو نقطه A و B باشد.



برای افراز $P=\{\Delta C_1,\dots,\Delta C_n\}$ از خم C به قطعات کوچکتر و برای هر $i=1,\dots,n$ قرار می دهیم:

$\Delta S_i = \Delta C_i$ طول قطعه $\qquad \|P\| = \max\{\Delta S_1,\dots,\Delta S_n\}$

اگر $f: C \to \mathbb{R}$ تابعی کراندار بر این خم باشد با انتخاب نقاط $P_1 \in \Delta C_1$ و ... و $P_n \in \Delta C_n$، عبارت $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$ را حاصل جمع ریمان تابع f برای افراز P نامیده و با نماد $S(f,P)$ نمایش می دهیم و حد آن را وقتی $\|P\| \to 0$ (درصورت وجود) با نماد $\int_C f ds$ نمایش می دهیم پس:

$$\int_C f ds = \lim_{\|P\| \to 0} S(f,P)$$

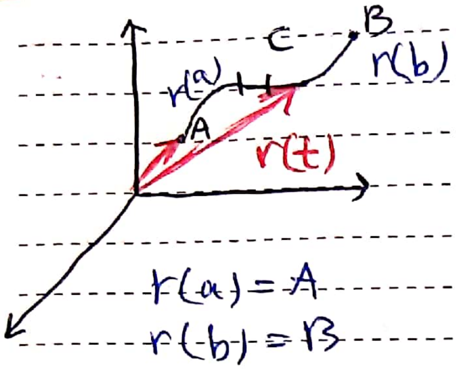
روش محاسبه: فرض کنیم C خمی به معادله برداری $r(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$ و $t\in[a,b]$ از نقطه A (نظیر $t=a$) به نقطه B (نظیر $t=b$) باشد همچنین فرض کنیم توابع $x(t)$، $y(t)$، $z(t)$ مشتقات پیوسته داشته باشند در این صورت می توان نشان داد:

$$\int_C f ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\,\|r'(t)\|\,dt$$

دانش بیاموز و از دانش کن حافظ

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$\|r'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}$$



$r(a) = A$
$r(b) = B$

$$\Delta s \simeq \|r(t+\Delta t) - r(t)\| \simeq \|r'(t)\|\Delta t$$

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C (x^2 - yz)\,ds$ که در آن C خمی از مارپیچ $x = \cos t$ و $y = \sin t$ و $z = t$، از نقطه‌ی $A(1,0,0)$ (نظیر $t=0$) به نقطه‌ی $B(1,0,2\pi)$ (نظیر $t=2\pi$) است.

حل)

$$r(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \Longrightarrow r'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}$$

@jozve_iut

$$\|r'(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

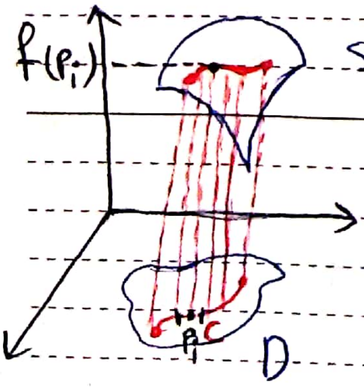
$$\int_C (x^2 - yz)\,ds = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - t\sin t)\sqrt{2}\,dt$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt - \sqrt{2}\int_0^{2\pi} t\sin t\,dt = \dots$$

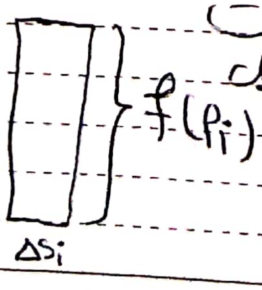
$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$ ، جزء به جزء

مشتق		انتگرال
t	+	$\sin t$
1	−	$-\cos t$
0		$-\sin t$

تعبیر هندسی:



$S: z = f(x,y)$



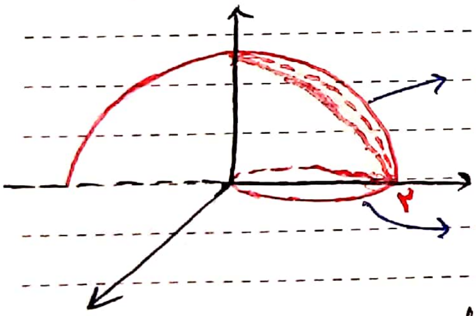
مساحت مستطیل: $f(P_i)\Delta S_i$

$$\int_C f\,ds = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

- فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای در صفحه xoy شامل خم C از نقطه A به نقطه B باشد همچنین فرض کنیم $f: D \to \mathbb{R}$ تابعی پیوسته و نامنفی تعریف شده بر ناحیه‌ی D با رویه نمایش S باشد در این صورت برای افراز $P = \{\Delta c_1, \dots, \Delta c_n\}$ از خم C عبارت $\sum_{i=1}^{n} f(p_i)\Delta s_i$ تقریباً با مساحت سطح استوانه‌ای بنا شده بر خم C در امتداد محور z بین صفحه xoy و رویه S برابر است بنابراین $\int_C f\,ds$ دقیقاً برابر این مساحت می باشد.

مثال) مساحت قسمتی از استوانه $x^2+y^2=2y$ بین صفحه xoy و نیم کره $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ را تعیین کنید.



$z=\sqrt{4-x^2-y^2}=f(x,y)$

$C: x^2+y^2=2y$ یا $x^2+(y-1)^2=1$

$$C \text{ پارامتری شده } = \begin{cases} x=\cos t \\ y-1=\sin t \end{cases}, \quad t\in[0,2\pi]$$

$$r(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\ 1+\sin t\end{pmatrix} \Rightarrow r'(t)=\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$$

$$\|r'(t)\|=\sqrt{1}=1 \xrightarrow[\text{تعبیر هندسی}]{\text{طبق}} \text{مساحت} = \int_C f\,ds = \int_0^{2\pi}\sqrt{4-\cos^2 t-(1+\sin t)^2}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{4-2-2\sin t}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}\sqrt{1-\sin t}\,dt=\dots$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

۲) انتگرال خط نوع دوم (میدان های برداری):

تعریف میدان برداری: فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^3$ و $P, Q, R: D \to \mathbb{R}$ توابعی تعریف شده بر این ناحیه باشند. در این صورت تابع $F: D \to \mathbb{R}^3$ را که به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = P(x,y,z)\hat{i} + Q(x,y,z)\hat{j} + R(\dots)\hat{k}$$

یک میدان برداری تعریف شده بر ناحیه D می نامیم.

میدان f را پیوسته (مشتق پذیر) هرگاه هریک از توابع P و Q و R پیوسته (مشتق پذیر) باشند.

به عنوان مثال میدان برداری $F(x,y,z) = 2xy\hat{i} + y^2\hat{j} + x\hat{k}$ بر $\mathbb{R}^3$ پیوسته و مشتق پذیر است و میدان برداری زیر بر $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ پیوسته و مشتق پذیر است.

$$F(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\hat{i} - \frac{xy}{x^2+y^2}\hat{j}$$

فرض کنیم C خم هموار به معادله ی برداری $r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ ، $t \in [a,b]$ از نقطه A (نظیر a) به نقطه B (نظیر $t=b$) باشد.

~~در این صورت $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:~~

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\underbrace{x(t), y(t), z(t)}_{r(t)}) \cdot \vec{r}'(t)\, dt$$

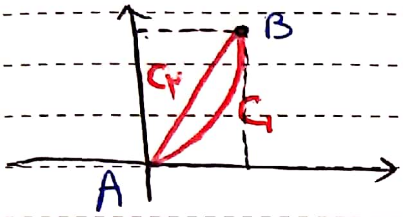
(ضرب داخلی دو بردار)

@jozve_iut

مثال) فرض کنیم $F(x,y)=2xy\hat{i}+(2x-y)\hat{j}$ مطلوب است تعیین $\int_C F\cdot dr$ که در آن

الف) C قسمتی از خم $y=x^3$ از نقطه $A(0,0)$ به $B(2,8)$.

ب) C قسمتی از خط راست واصل از $A(0,0)$ به $B(2,8)$.



$$C:\begin{cases} x=t \\ y=t^3 \end{cases} \quad t\in[0,2]$$

$$r(t)=\begin{pmatrix} t \\ t^3 \end{pmatrix} \Rightarrow r'(t)=\begin{pmatrix} 1 \\ 3t^2 \end{pmatrix} \qquad r(0)=A,\ r(2)=B$$

$$F=\begin{pmatrix} 2xy \\ 2x-y \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{F}(r(t))=\begin{pmatrix} 2t^4 \\ 2t-t^3 \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{F(r(t))\cdot r'(t)}_{F(x(t),\,y(t))\cdot r'(t)}=2t^4+6t^3-3t^5$$

$$\Rightarrow \int_C F\cdot dr=\int_0^2 F(r(t))\cdot r'(t)\,dt$$

$$=\int_0^2 2t^4+6t^3-3t^5\,dt=\ldots$$

تذکر: فرض کنیم C خمی هموار به معادله برداری $r(t)=x(t)\hat{i}+y(t)\hat{j}+z(t)\hat{k}$، $t\in[a,b]$ از نقطه A (نظیر $t=a$) به نقطه B (نظیر $t=b$) باشد. اگر $f:C\to\mathbb{R}$ تابع ثابت $f=1$ باشد، آنگاه

$$\int_C f\,ds=\int_C ds=\int_a^b \|r'(t)\|\,dt=$$ طول خم C از نقطه A به B

$$C:\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases} \quad t\in[0,2\pi]$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان
@jozve_iut

تذکر: فرض کنیم F یک میدان برداری با ضابطهٔ $F = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ و C منحنی هموار به معادله برداری $r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ ، $t\in[a,b]$ از نقطه A (نظیر $t=a$) به نقطه B (نظیر $t=b$) باشد.

در این صورت بنابر آنچه قبلاً گفته شد:

$$\int_C F\cdot dr = \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\,dt = \int_a^b \Big(P(x(t),y(t),z(t))\cdot x'(t) + Q(\dots)\cdot y'(t) + R(\dots)\cdot z'(t)\Big)dt$$

توجه کنیم که عبارت آشنای است که می‌توانیم به صورت نمادین به فرم $\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ نیز نمایش دهیم که در آن dx ، dy و dz نمادهای دیفرانسیلی هستند که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$dx = x'(t)\,dt$$
$$dy = y'(t)\,dt$$
$$dz = z'(t)\,dt$$

به این ترتیب

$$\int_C F\cdot dr = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

مثال) مطلوب است محاسبهٔ $\int_C (2x+z)\,dx + y\,dy + (x-z)\,dz$ که در آن

الف) C عبارت از خم $x=2t$ ، $y=t^2$ ، $z=t^3$ از نقطه $A(0,0,0)$ به نقطه $B(2,1,1)$

ب) C عبارت از خط راست از نقطه A به B است.

حل الف)

$$C:\begin{cases} x=2t \\ y=t^2 \\ z=t^3 \end{cases},\ t\in[0,1] \implies \begin{cases} dx = 2\,dt \\ dy = 2t\,dt \\ dz = 3t^2\,dt \end{cases}$$

$$\implies \int_C (2x+z)\,dx + y\,dy + (x-z)\,dz = \int_0^1 (4t+t^3)\,2\,dt + 2t^3\,dt + (6t^3-3t^5)\,dt$$

و وی که در کار غریبان عجبت اهمالست

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

ش	ی	د	س	چ	پ	ج
				۱	۲	۳
۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷
۱۸	۱۹	۲۰	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴
۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	

$$\int_A^B F\cdot dr = f(B)-f(A)$$

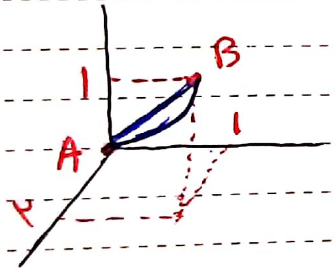
$$\int_0^1 8t + 10t^3 - 3t^5 = \frac{8}{2}+\frac{10}{4}-\frac{3}{6} = \boxed{6}$$

ب) فرض کنیم L خط گذرنده از دو نقطه A و B باشد. در این صورت

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\parallel L\\ A(0,0,0)\in L\end{array}\right\} \Longrightarrow L:\begin{cases}x=2t+0\\ y=t+0\\ z=t+0\end{cases} \Longrightarrow C=\begin{cases}x=2t\\ y=t\ ,\ t\in[0,1]\\ z=t\end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases}dx=2dt\\ dy=dt\\ dz=dt\end{cases} \Longrightarrow \int_C (2x+z)dx+y\,dy+(x-z)\,dz$$

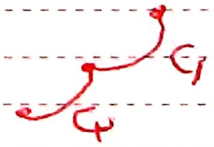
$$=\int_0^1 (4t+t)2dt+t\,dt+t\,dt=\int_0^1 12t\,dt=\frac{12t^2}{2}\Big]_0^1=\boxed{6}$$



تذکر: همه‌ی خواص عمومی که برای سایر انتگرال‌ها وجود دارد برای هر دو نوع انتگرال خط نیز وجود دارد.

به طور مثال اگر C خم متشکل از دو خم C_1 و C_2 باشد آنگاه

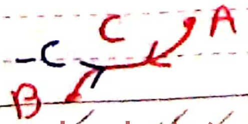
$$\int_C F\cdot dr=\int_{C_1} F\cdot dr+\int_{C_2} F\cdot dr$$



به خصوص برای انتگرال نوع دوم خاصیت زیر به طور خاص برقرار است.

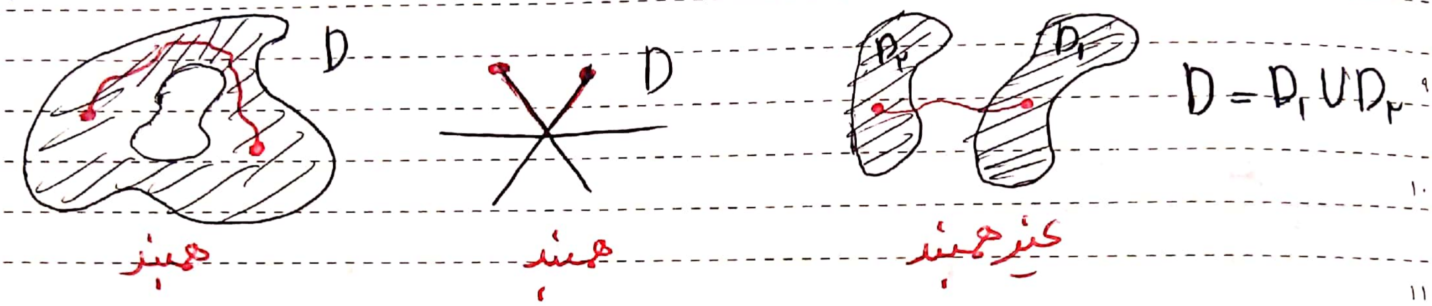
$$\int_C F\cdot dr=-\int_{-C} F\cdot dr$$

که در آن $-C$ همان خم C است که مسیر حرکت بر روی آن خلاف جهت مسیر حرکت بر روی C است.



@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

تعریف: ناحیه $D \subseteq \mathbb{R}^2$ را یک ناحیه همبند نامیم، هرگاه هر دو نقطه از این ناحیه را بتوانیم توسط یک خم پیوسته به یکدیگر وصل کنیم به طوری که این خم کاملاً در D قرار بگیرد.

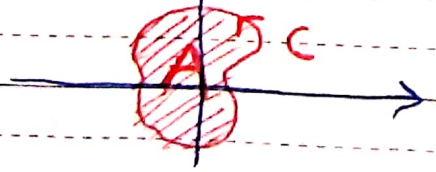


تعریف: ناحیه همبند $D \subseteq \mathbb{R}^2$ را همبند ساده نامیم هرگاه برای هر خم بسته مانند C در D، ناحیه محصور توسط خم نیز کاملاً در D قرار گیرد.

@jozve_iut

قضیه گرین: فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^2$ یک ناحیه همبند ساده باشد و توابع $P, Q : D \to \mathbb{R}$ بر D مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته داشته باشند. اگر C خم بسته ساده طی شده در جهت خلاف عقربه‌های ساعت (یا جهت مثبت) باشد، آنگاه

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_A (Q_x - P_y)\,dx\,dy$$



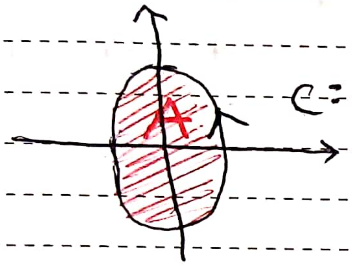
که در آن A ناحیه محصور توسط خم C می‌باشد.

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مثال) مطلوب است محاسبه‌ی تعریف انتگرال های زیر:

$$I=\int_C \left(x\sin^2 x+2xy\right)dx+\left(\frac{y^2}{1+y^2}+3x^2\right)dy$$

C یعنی $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ طی شده در جهت مثبت.



$$C: \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$$

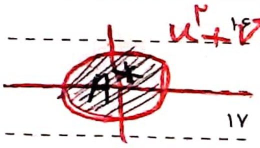
$$\begin{cases} P=x\sin^2 x+2xy \\ Q=\frac{y^2}{1+y^2}+3x^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P_y=2x \\ Q_x=6x \end{cases}$$

طبق قضیه گرین

$$\Longrightarrow I=\oint_C Pdx+Qdy=\iint_A (Q_x-P_y)\,dx\,dy$$

$$=\iint_A 4x\,dx\,dy=\iint_{A^*} 8u\,\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv$$

$$\begin{cases} u=\frac{x}{2} \\ v=\frac{y}{3} \end{cases} \Longrightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1 \Longrightarrow u^2+v^2=1$$



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix}}=6$$

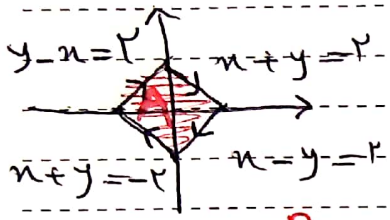
$$I=\iint_{A^*} 48\,u\,du\,dv=\int_0^{2\pi}\int_0^1 48\,r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$$

$$\Longrightarrow I=48\left(\int_0^1 r^2dr\right)\left(\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta\right)=0$$

$A^*=\begin{cases} 0\leq r\leq 1 \\ 0\leq\theta\leq 2\pi \end{cases}$ (در قطبی)

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$I=\int_C \frac{y\,dx - x\,dy}{|x|+|y|}$$ C خم بسته $|x|+|y|=۲$ در جهت عقربه‌های ساعت



$C: |x|+|y|=۲$

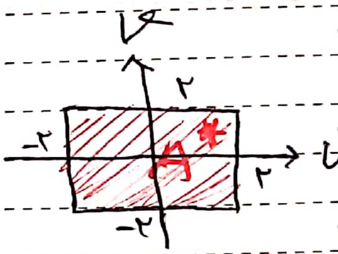
$$I=\int_C \frac{y\,dx}{|x|+|y|}-\frac{x}{|x|+|y|}\,dy$$

$$=\oint_C \overbrace{\frac{y}{۲}}^{P}dx-\overbrace{\frac{x}{۲}}^{Q}dy = -\oint_{-C}\frac{y}{۲}dx-\frac{x}{۲}dy$$

$$=-\iint_A\left(-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۲}\right)dx\,dy=\iint_A dx\,dy$$

تغییر متغیر

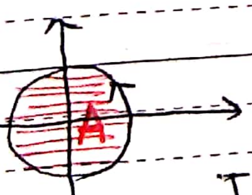
$$\begin{cases}u=x+y\\ v=x-y\end{cases}\Longrightarrow A^*=\begin{cases}-۲\le u\le ۲\\ -۲\le v\le ۲\end{cases}$$



$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{۱}{\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}}=\frac{۱}{\begin{vmatrix}۱ & ۱\\ ۱ & -۱\end{vmatrix}}=\frac{-۱}{۲}$$

$$\Longrightarrow I=\iint_A dx\,dy=\iint_{A^*}\frac{۱}{۲}du\,dv=\int_{-۲}^{۲}\int_{-۲}^{۲}\frac{۱}{۲}du\,dv=\boxed{۸}$$

$$\int_C \overbrace{\frac{-y}{x^۲+y^۲}}^{P}dx+\overbrace{\frac{x}{x^۲+y^۲}}^{Q}dy=I$$ C دایره $x^۲+y^۲=a^۲$ در جهت مثبت (پاد ساعتگرد)



$C: x^۲+y^۲=a^۲$

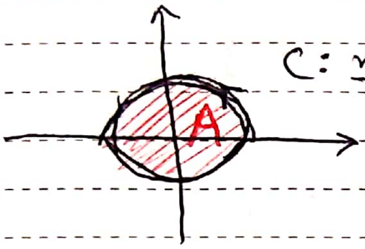
طبق گرین

$$I=\oint_C \overbrace{\frac{-y}{a^۲}}^{P}dx+\overbrace{\frac{x}{a^۲}}^{Q}dy \overset{\uparrow}{=}\iint_A (Q_x-P_y)\,dx\,dy$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$= \iint_A \frac{2}{a^2}\, dx\,dy = \frac{2}{a^2} \times \pi a^2 = \boxed{2\pi}$$

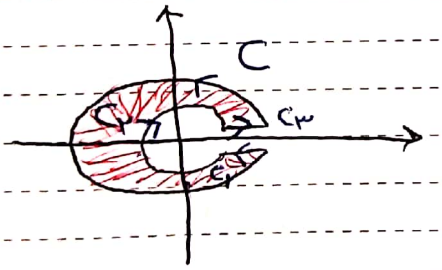
$$I = \int_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$ که C بیضی $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ در جهت مثلثاتی (جهت مثبت).



$C: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

$$\begin{cases} P = \frac{-y}{x^2+y^2} \\ Q = \frac{x}{x^2+y^2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} P_y = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ Q_x = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{cases}$$

اما با توجه به اینکه Q_x و P_y در $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ پیوسته اند و در $(0,0)$ تعریف نشده اند بنابراین فعلاً از قضیه گرین نمی توان استفاده کرد. برای رفع این مشکل خم جدید و بسته ی $C\cup C_1\cup C_2\cup C_3$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:



$C: \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ (C_1 و C_3 منطبق بر هم اند)

$C_2: x^2+y^2=a^2$

$C_3 = -C_1$

بنابراین با استفاده از گرین داریم:

$$\int_{C\cup C_1\cup C_2\cup C_3} P\,dx+Q\,dy = \iint_A \underbrace{(Q_x-P_y)}_{0}\,dx\,dy = 0$$

از طرفی:

$$0 = \int_{C\cup C_1\cup C_2\cup C_3} P\,dx+Q\,dy = \int_C \bigcirc + \int_{C_1} \bigcirc + \int_{C_2} \bigcirc + \int_{C_3} \bigcirc$$

$C_3 = -C_1$

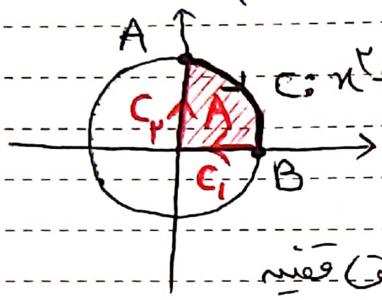
$$\Rightarrow \oint_C P\,dx+Q\,dy = -\oint_{C_2} P\,dx+Q\,dy$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$= \oint_{-C_2} p\,dx + Q\,dy = \boxed{2\pi}$$ → طبق مثال قبل

مثال) مطلوب است محاسبه $\int_C \underbrace{(x^3+y^3)}_{P}dx + \underbrace{\left(\frac{y^3}{1+y^4}+xy^2\right)}_{Q}dy$ که در آن C قسمتی از دایره $x^2+y^2=1$ از نقطه $A(0,1)$ به $B(1,0)$ در ربع اول صفحه است.

حل) خم بسته $C \cup C_1 \cup C_2$ را به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیریم.



طبق قضیه گرین: $\oint_{C\cup C_1\cup C_2} p\,dx + Q\,dy = -\oint_{-(C\cup C_1\cup C_2)} p\,dx + Q\,dy$

طبق گرین
$$= -\iint_A (Q_x - P_y)\,dx\,dy = -\iint_A (y^2 - 3y^2)\,dx\,dy = 2\iint_A y^2\,dx\,dy$$

A به صورت قطبی: $\begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \end{cases}$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r^2\sin^2\theta \times r\,dr\,d\theta$$

$$= 2\Big(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin^2\theta}_{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}\,d\theta\Big)\Big(\underbrace{\int_0^1 r^3\,dr}_{\frac{1}{4}}\Big) = \frac{\pi}{2}\times\frac{1}{4} = \boxed{\frac{\pi}{8}}$$

از طرفی:
$$\frac{\pi}{8} = \int_{C\cup C_1\cup C_2} p\,dx + Q\,dy = \int_C \bigcirc + \int_{C_1}\bigcirc + \int_{C_2}\bigcirc$$

$$\Rightarrow \int_C p\,dx + Q\,dy = \frac{\pi}{8} - \underbrace{\int_{C_1} p\,dx + Q\,dy}_{I_1} - \underbrace{\int_{C_2} p\,dx + Q\,dy}_{I_2}$$

$$I_1 = \int_{C_1} p\,dx + \cancel{Q\,dy} \overset{(*)}{=} \int_0^1 -(1-t)^3\,dt = \frac{(1-t)^4}{4}\Big]_0^1 = \boxed{\frac{-1}{4}}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

(*) $C_1 = \begin{cases} x=-t+1 \\ y=0 \end{cases} , \quad t\in[0,1] \Longrightarrow \begin{cases} dx=-dt \\ dy=0 \end{cases}$

$$I_2 = \int_{C_2} \cancel{P\,dx}^{\,0} + Q\,dy \overset{(**)}{=} \int_0^1 \frac{t^3}{1+t^4}\,dt = \frac{1}{4}\ln(1+t^4)\Big]_0^1 = \boxed{\frac{\ln 2}{4}}$$

(**) $C_2 = \begin{cases} x=0 \\ y=t \end{cases} , \quad t\in[0,1] \Longrightarrow \begin{cases} dx=0 \\ dy=dt \end{cases}$

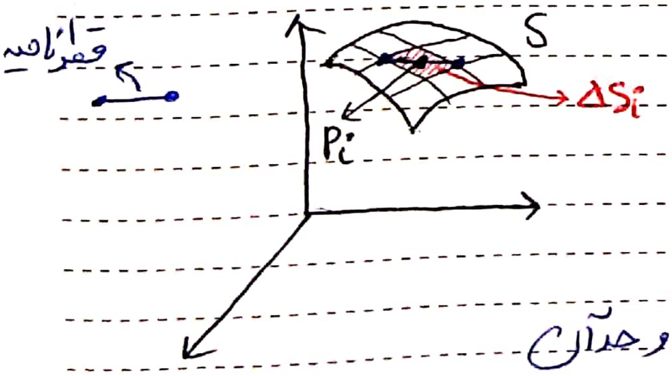
$$\Longrightarrow \int_C P\,dx + Q\,dy = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} - \frac{\ln 2}{4}$$

انتگرال رویه یا انتگرال سطح:

@jozve_iut

فرض کنیم $S\subseteq \mathbb{R}^3$ رویه‌ای کراندار باشد و $f: S\to \mathbb{R}$ تابعی کراندار و تعریف شده بر رویه S باشد برای افراز $P=\{\Delta S_1,\dots,\Delta S_n\}$ از رویه S به قطعات کوچکتر و برای هر $i=1,\dots,n$ قرار می‌دهیم

$\Delta\sigma_i = \Delta S_i$ مساحت قطعه



$$\|P\| = \max\{d(\Delta S_1),\dots,d(\Delta S_n)\}$$

متناظر با نقاط $P_1\in\Delta S_1, \dots, P_n\in\Delta S_n$،
عبارت $\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta\sigma_i$ را
حاصل جمع ریمان f نسبت به افراز P نامیده و حد آن
را وقتی $\|P\|\to 0$ (درصورت وجود) با نماد $\iint_S f\,d\sigma$ نمایش می‌دهیم
و به آن انتگرال روی سطح S تابع f می‌گوییم. پس

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$\iint_S f\,d\sigma = \lim_{\|P\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\,\Delta\sigma_i$$

تذکر: توجه کنید که اگر $f: S \to \mathbb{R}$ تابع ثابت 1 باشد آنگاه

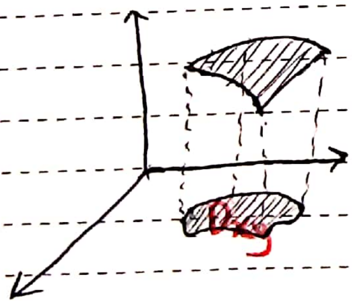
$$\iint_S 1\,d\sigma = \text{مساحت سطح } S$$

همچنین همه‌ی خواص عمومی انتگرال‌ها برای این نوع از انتگرال نیز برقرار است.

روش محاسبه:

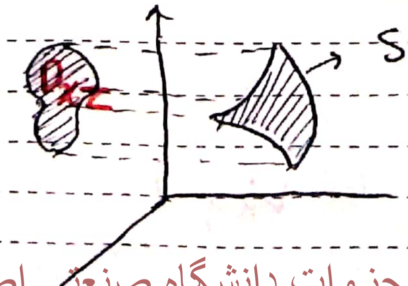
فرض کنیم S رویه‌ای به معادله $\begin{cases} z = g(x,y) \\ (x,y) \in D_{xy} \end{cases}$ باشد و تابع و مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته داشته باشد. در این صورت می‌توان نشان داد که:

$$\iint_S f\,d\sigma = \iint_{D_{xy}} f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy$$



در حالتی که S دارای معادله $\begin{cases} y = g(x,z) \\ (x,z) \in D_{xz} \end{cases}$ باشد به طور مشابه می‌توان نشان داد که:

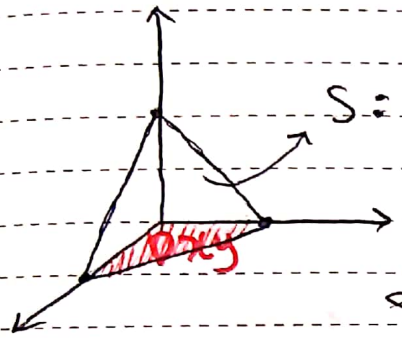
$$\iint_S f\,d\sigma = \iint_{D_{xz}} f(x,g(x,z),z)\sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\,dx\,dz$$



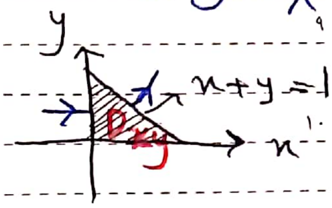
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مثال: مطلوب است محاسبه‌ی هر یک از انتگرال‌های زیر:

الف) $\iint_S (xy - z)\, d\sigma$ S قسمتی از صفحه $x+y+z=1$ در $\frac{1}{8}$ اول فضا



$S: x+y+z=1$ یا $z=1-x-y$



$$S: \begin{cases} z=1-x-y \\ (x,y)\in D_{xy} \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{3}$$

$$\Longrightarrow \iint_S (xy-z)\, d\sigma = \iint_{D_{xy}} (xy-1+x+y)\sqrt{3}\, dx\,dy$$

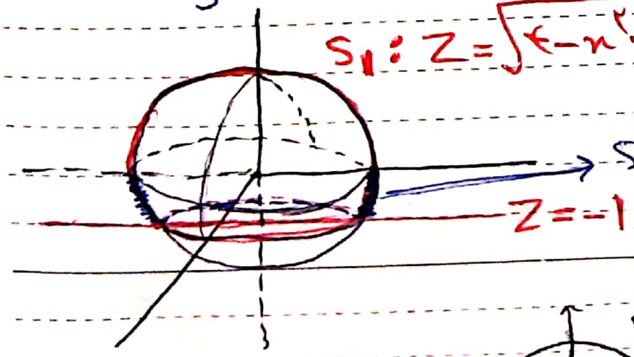
($\sqrt{3} = \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$)

$$\overset{*}{=} \sqrt{3}\int_0^1 \left(\int_0^{1-y} (xy-1+x+y)\, dx\right) dy = \ldots$$

* D_{xy} به صورت x ساده $= \begin{cases} 0\leq x\leq 1-y \\ 0\leq y\leq 1 \end{cases}$

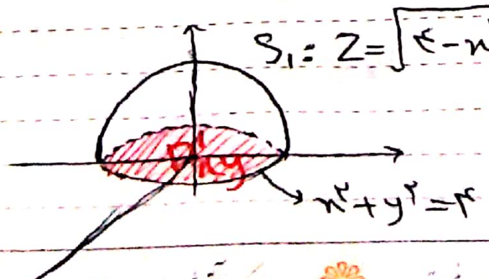
ب) $\iint_S z^2\, d\sigma$ S قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=4$ بالای صفحه $z=-1$

$S_1: z=\sqrt{4-x^2-y^2}$



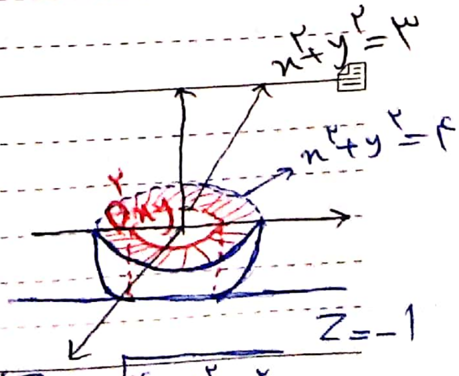
$S_2: z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$

$z=-1$



$S_1: z=\sqrt{4-x^2-y^2}$

$x^2+y^2=4$



$S_2: z=-\sqrt{4-x^2-y^2}$

@jozve_iut
کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

$$S_1:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ (x,y)\in D^1_{xy}\end{cases} \qquad S_2:\begin{cases} z=-\sqrt{4-x^2-y^2} \\ (x,y)\in D^2_{xy}\end{cases}$$

برای رویه‌های S_1 و S_2 داریم

$$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{4-x^2-y^2}+\frac{y^2}{4-x^2-y^2}}=\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$$

$$S=S_1\cup S_2 \Longrightarrow \iint_S z^2\,d\sigma=\underbrace{\iint_{S_1} z^2\,d\sigma}_{I_1}+\underbrace{\iint_{S_2} z^2\,d\sigma}_{I_2}$$

$$\Longrightarrow I_1=\iint_{D^1_{xy}}(4-x^2-y^2)\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

@jozve_iut

$$=2\iint_{D^1_{xy}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy=2\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\left(\sqrt{4-r^2}\right)r\,dr\,d\theta$$

$$=2\times 2\pi\times\left(-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^2=-2\pi\left(\frac{2}{3}(0-8)\right)=\frac{32\pi}{3}$$

$$I_2=\iint_{S_2} z^2\,d\sigma=\iint_{D^2_{xy}}\left(-\sqrt{4-x^2-y^2}\right)^2\frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}\,dx\,dy$$

$$=2\iint_{D^2_{xy}}\sqrt{4-x^2-y^2}\,dx\,dy=2\int_0^{2\pi}\left(\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\sqrt{4-r^2}\right)r\,dr\,d\theta\right)$$

$$=2\times 2\pi\left(-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(4-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{\sqrt{3}}^{2}=\frac{4\pi}{3}$$

$$\Longrightarrow \iint_S z^2\,d\sigma=I_1+I_2=\frac{4\pi}{3}+\frac{32\pi}{3}=\boxed{12\pi}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$*\ (u^r)' = r u' u^{r-1}$

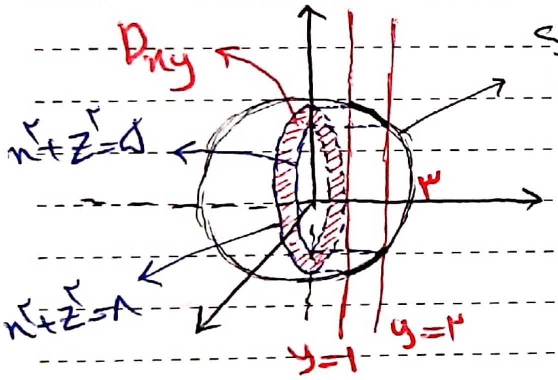
مثال: مطلوب است محاسبه مساحت هریک از رویه های زیر.

یادآوری: $S: \begin{cases} z = g(x,y) \\ (x,y) \in D_{xy} \end{cases}$

$$S \text{ مساحت رویه } = \iint_S d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dx\,dy$$

الف) مساحت قسمتی از کره $x^2+y^2+z^2=9$ بین صفحات $y=1$ و $y=2$

$S: y = \sqrt{9-x^2-z^2}$



$\pi_{y=1} \cap S \Longrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases} \Longrightarrow x^2+z^2=8$

@jozve_iut

$\pi_{y=2} \cap S \Longrightarrow \begin{cases} y=2 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases} \Longrightarrow x^2+z^2=5$

$S: \begin{cases} y = g(x,z) = \sqrt{9-x^2-z^2} \\ (x,z) \in D_{xz} \end{cases}$

$$S \text{ مساحت رویه } = \iint_S d\sigma = \iint_{D_{xz}} \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\, dx\,dz$$

$$= \iint_{D_{xz}} \sqrt{1+\frac{x^2}{9-x^2-z^2}+\frac{z^2}{9-x^2-z^2}}\, dx\,dz = \iint_{D_{xz}} \frac{3}{\sqrt{9-x^2-z^2}}\, dx\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{\sqrt5}^{\sqrt8} \frac{3}{\sqrt{9-r^2}}\, r\,dr\,d\theta = \left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_{\sqrt5}^{\sqrt8} \frac{3r}{\sqrt{9-r^2}}\,dr\right) = 6\pi$$

*

در سیستم قطبی: $D_{xz} = \begin{cases} \sqrt5 \leq r \leq \sqrt8 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

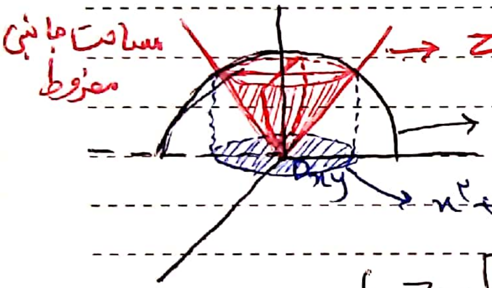
* $\int \frac{r}{\sqrt{9-r^2}}\,dr = \int -\frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{u}} = -\frac{1}{2}\,\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -u^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{9-r^2}$

تغییر متغیر $u = 9-r^2 \Rightarrow du = -2r\,dr$

$\Rightarrow dr = \frac{du}{-2r}$

* $\frac{\partial}{\partial x}\left((9-x^2-z^2)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \times -2x \times (9-x^2-z^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2-z^2}}$

ب) مساحت قسمتی از مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ درون کره $x^2+y^2+z^2=2$

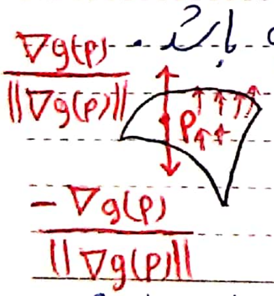


محل برخورد مخروط و کره $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=1$

$S = \begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ (x,y)\in D_{xy} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{2}$

$S_{\text{مساحت رویه}} = \iint_S d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,dx\,dy = \iint_{D_{xy}} \sqrt{2}\,dx\,dy = \sqrt{2}\,\pi$

شار میدان: فرض کنیم S رویه‌ای هموار به معادله $g(x,y,z)=K$ باشد.



$S: g(x,y,z)=K$ در این صورت در هر نقطه از رویه S مانند P دو بردار قائم یکه در دو جهت مختلف وجود دارند.

بدین ترتیب میدان‌های مختلفی شامل بردارهای قائم یکه بر S وجود خواهند داشت.

رویه S را جهت پذیر نامیم، هرگاه یک میدان برداری شامل بردارهای قائم یکه بر S وجود داشته باشد که پیوسته باشد

$F(x,y,z) = \nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{pmatrix}$

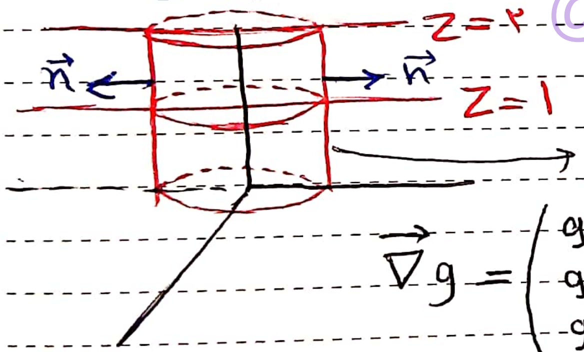
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

تعریف: فرض کنیم $D\subseteq \mathbb{R}^3$ و $F: D\to \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری تعریف شده بر D باشد. همچنین فرض کنیم $S\subseteq D$ رویه‌ای جهت‌پذیر با میدان برداری قائم یکه $\vec{n}$ باشد. در این صورت عبارت $\iint_S F\cdot n\, d\sigma$ را شار عبوری میدان F بر رویه S در جهت بردار $\vec{n}$ می‌نامیم.

مثال) شار حاصل از هر یک از میدان‌های زیر گذرنده از رویه داده شده در جهت تعیین شده را بدست آورید.

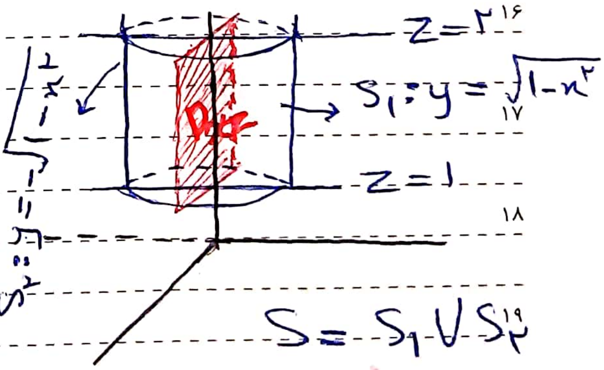
$$F(x,y,z)=(x+y)\hat{i}+y\hat{j}+(xy+z)\hat{k}$$

الف) S قسمتی از استوانه $x^2+y^2=1$ بین صفحات $z=1$ و $z=2$، $\vec{n}$ هم‌جا و به سمت بیرون استوانه.



$$S: g(x,y,z)=x^2+y^2=1$$

$$\vec{\nabla} g=\begin{pmatrix} g_x\\ g_y\\ g_z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2x\\ 2y\\ 0\end{pmatrix}$$



$$\Rightarrow n=\frac{\nabla g}{\|\nabla g\|}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x\\ y\\ 0\end{pmatrix}$$

$$S=S_1\cup S_2$$

$$\Rightarrow \vec{F}\cdot\vec{n}=\frac{x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma=\iint_S \frac{x^2+xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,d\sigma$$

$$=\underbrace{\iint_{S_1}\ominus\, d\sigma}_{I_1}+\underbrace{\iint_{S_2}\ominus\, d\sigma}_{I_2}$$

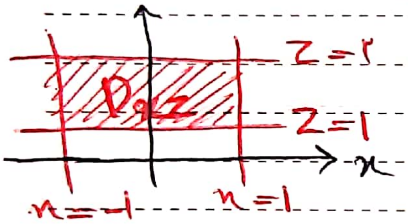
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$I_1 = \iint_{S_1} \frac{x^2+xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d\sigma$$

$$S_1: \begin{cases} y=\sqrt{1-x^2} \\ (x,z)\in D_{xz}\end{cases} \Longrightarrow \sqrt{1+y_x^2+y_z^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$S_2: \begin{cases} y=-\sqrt{1-x^2} \\ (x,z)\in D_{xz}\end{cases} \Longrightarrow \sqrt{1+y_x^2+y_z^2} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Longrightarrow I_1 = \iint_{D_{xz}} \frac{x^2+x\sqrt{1-x^2}+1-x^2}{1} \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,dz$$



$$= \iint_{D_{xz}} \frac{x\sqrt{1-x^2}+1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,dz = \iint_{D_{xz}} x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,dz$$

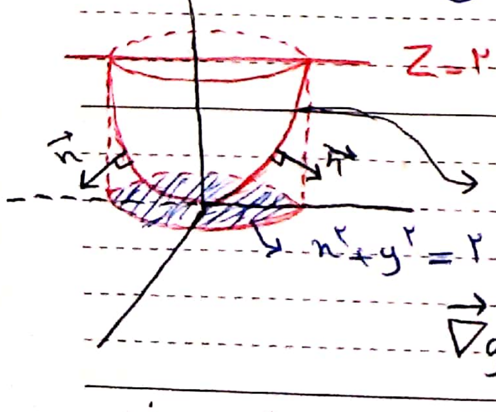
$$= \int_{-1}^{1} x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{x^2}{2}+\sin^{-1}x \Big]_{-1}^{1} = \boxed{\pi}$$

$$I_2 = \iint_{S_2} \frac{x^2+xy+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, d\sigma \quad \rightarrow \sqrt{1+y_x^2+y_z^2}\, dx\,dz$$

$$= \iint_{D_{xz}} \frac{1-x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\, dx\,dz = \sin^{-1} - \frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{1} = \boxed{\pi}$$

$$\Longrightarrow I = I_1+I_2 = \boxed{2\pi}$$

ب) $F(x,y,z)=\begin{pmatrix} x-y \\ x+y \\ z\end{pmatrix}$ ، S قسمتی از سهمی‌گون $z=x^2+y^2$ زیر صفحه $z=2$ ، $\vec{n}$ همه جا به سمت بیرون سهمی‌گون:



$$S: g(x,y,z) = x^2+y^2-z=0$$

$$\vec{\nabla} g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1\end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{n} = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -1\end{pmatrix}$$

خود فروشان را الگوی می فروشان اند نیست
بر در میخانه رفتن کار یکرنگان بود
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{2x^2-2xy+2xy+2y^2-z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}$$

$$\text{شار عبوری} = \iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iint_S \frac{2x^2+2y^2-z}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,d\sigma$$

$$S=\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ (x,y)\in D_{xy}\end{cases} \Longrightarrow \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$$

$$= \iint_{D_{xy}} \frac{2x^2+2y^2-(x^2+y^2)}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \times \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dx\,dy$$

$$= \iint_{D_{xy}} x^2+y^2\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r^2\times r\,dr\,d\theta = 2\pi\times \frac{r^4}{4}\Big]_0^{\sqrt{2}} = \boxed{2\pi}$$

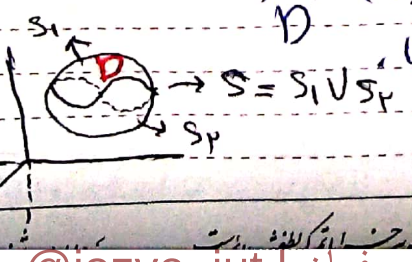
D_{xy} در سیستم قطبی $=\begin{cases} 0\leq r\leq \sqrt{2} \\ 0\leq \theta\leq 2\pi\end{cases}$

تذکر: درحالتی که S رویه‌ای بسته باشد می‌توانیم از قضیه مهم زیر برای محاسبه $\iint_S F\cdot n\,d\sigma$ استفاده کنیم.

قضیه گاوس (دیورژانس): فرض کنیم S رویه‌ای بسته و قطعه به قطعه هموار در فضای $\mathbb{R}^3$ بوده و بردار $\vec{n}$ همه جا بر قطعات S رو به سمت بیرون باشد. همچنین فرض کنیم توابع P و Q و R بر S و نقاط محصور توسط S دارای مشتقات جزئی مرتبه اول پیوسته باشند. در این صورت برای میدان $F=P\hat{i}+Q\hat{j}+R\hat{k}$ داریم:

$$\oiint_S F\cdot n\,d\sigma = \iiint_D (P_x+Q_y+R_z)\,dx\,dy\,dz$$

که در آن D ناحیه محصور توسط رویه S است.

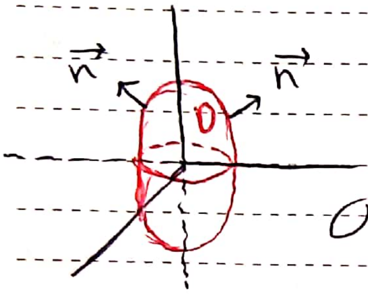


$\rightarrow S=S_1\cup S_2$

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

مثال) مطلوب است محاسبه $\iint_S F\cdot n\, d\sigma$ در هر یک از حالات های زیر:

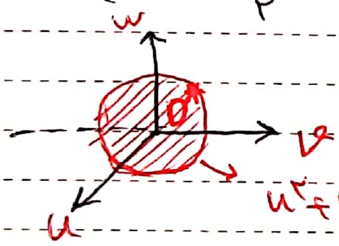
الف) $F=\begin{pmatrix} x^2+5yz^2 \\ y+4xz \\ x^3-y^3 \end{pmatrix}$ (P, Q, R)، S رویه بیضی گون $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$، $\vec{n}$ هرجا رو به سمت بیرون.



$$S: x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$$

طبق قضیه گاوس: $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, d\sigma = \iiint_D (2x+1)\,dx\,dy\,dz$

$$\begin{cases} u=x \\ v=y \\ w=\frac{z}{2} \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1 \Rightarrow u^2+v^2+w^2=1$$



$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}} = 2$$

$$= \iiint_{D^*} (2u+1)\, 2\, du\, dv\, dw$$

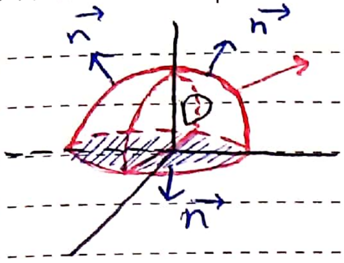
در سیستم کروی D^*: $\begin{cases} 0\le \rho \le 1 \\ 0\le \varphi \le \pi \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^1 (2\rho \sin\varphi \cos\theta + 1)\rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

$= \dots$

ب) $F(x,y,z)=\begin{pmatrix} x-y \\ y+e^z\sin x \\ z+\cosh xy \end{pmatrix}$، S رویه بسته متشکل از دو قسمتی از کره‌ی $x^2+y^2+z^2=1$ در نیم فضای $z\ge 0$ و قسمتی از صفحه $z=0$ درون کره $x^2+y^2+z^2=1$، n هرجا رو به سمت بیرون این رویه:

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان



$$\iint_S \vec F\cdot\vec n\, d\sigma = \iiint_D (P_x+Q_y+R_z)\,dx\,dy\,dz$$

طبق گاوس

$$= \iiint_D 3\,dx\,dy\,dz = 3\iiint_D dx\,dy\,dz = 3\times\frac{4}{3}\pi = 4\pi$$

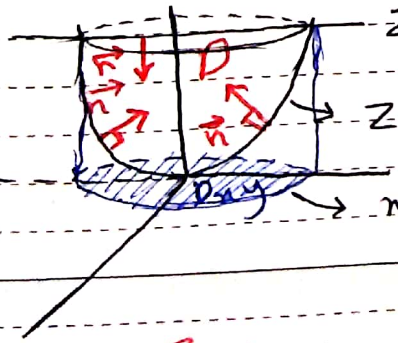
حجم ناحیه D

تذکر: فرض کنیم $F=\begin{pmatrix}P\\Q\\R\end{pmatrix}$ میدانی مشتق پذیر باشد. در این صورت عبارت $P_x+Q_y+R_z$ را واگرایی یا دیورژانس میدان F نامیده و با نماد $div\,\vec F$ نمایش می‌دهیم. با استفاده از نماد $\vec\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat i+\frac{\partial}{\partial y}\hat j+\frac{\partial}{\partial z}\hat k$ نیز می‌توان واگرایی میدان F را به صورت $\vec\nabla\cdot\vec F$ نیز نمایش داد. به این ترتیب

$$div\,\vec F=\vec\nabla\cdot\vec F=P_x+Q_y+R_z$$

مثال) فرض کنیم S قسمتی از سطح گون $z=x^2+y^2$ زیر صفحه $z=1$ و $\vec n$ قائم یکه رو به سمت درون سطح گون باشد. مطلوب است محاسبه $\iint_S F\cdot n\, d\sigma$ که در آن

$$F=\begin{pmatrix}x+ze^y\\y+x^2z^2\\z-x^2\end{pmatrix}$$



رویه بسته $S\cup S_1$ را در نظر می‌گیریم:

طبق قضیه گاوس داریم

$$\iint_{S\cup S_1} F\cdot\vec n\, d\sigma = -\iint_{S\cup S_1} F\cdot\vec n\, d\sigma$$

(سمت چپ: رو به درون — سمت راست: رو به بیرون)

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

طبق گاوس

$$= -\iiint_D \operatorname{div} F\,dx\,dy\,dz = -\iiint_D 3\,dx\,dy\,dz$$

D در سیستم قطبی $D = \begin{cases} r^2 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$ $= -3\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^1 r\,dz\,dr\,d\theta$

$$= -3\int_0^{2\pi}\int_0^1 r(1-r^2)\,dr\,d\theta = -3\left(\int_0^{2\pi} d\theta\right)\left(\int_0^1 r(1-r^2)\,dr\right)$$

$$= -3 \times 2\pi \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big]_0^1 = \frac{-3\pi}{2}$$

از طرفی: $\frac{-3\pi}{2} = \iint_{S\cup S_1} F\cdot n\,d\sigma = \iint_S F\cdot n\,d\sigma + \iint_{S_1} F\cdot n\,d\sigma$

رو به درون

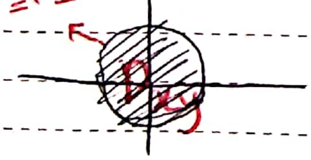
$$\Longrightarrow \iint_S F\cdot n\,d\sigma = \frac{-3\pi}{2} - \iint_{S_1} F\cdot n\,d\sigma$$

رو به بیرون

$S_1: z = +1 \Longrightarrow n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow F\cdot n = x^2 - z$

$$\Longrightarrow \iint_{S_1} F\cdot n\,d\sigma = \iint_{S_1} x^2 - z\,d\sigma$$

$S_1: \begin{cases} z = 1 \\ (x,y) \in D_{xy} \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = 1$ ($z_x \to 0$, $z_y \to 0$)

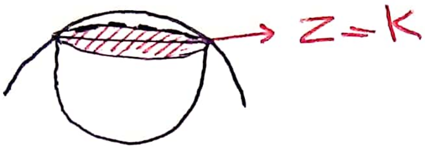


$$= \iint_{D_{xy}} (x^2 - 1)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi}\int_0^{2} (r^2\cos^2\theta - 1)\,r\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^3\cos^2\theta - r)\,dr\,d\theta = \dots$$

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

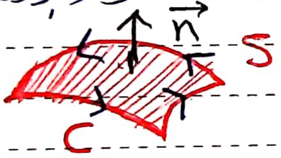


تعریف: متناظر با میدان $F = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ ، میدان گردشی F را که با نماد $\text{carl}\,\vec{F}$ نمایش می‌دهیم به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{carl}\,\vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= (R_y - Q_z)\hat{i} + (P_z - R_x)\hat{j} + (Q_x - P_y)\hat{k}$$

قضیه (استوکس): فرض کنیم S رویه‌ای کراندار و قطعه‌قطعه هموار بوده و C خم مرزی آن باشد. فرض کنیم جهت حرکت بر روی خم C نسبت به جهت قائم یکه n بر S از قانون دست راست پیروی می‌کند. در این صورت اگر $F = P\hat{i} + Q\hat{j} + R\hat{k}$ میدان مشتق‌پذیر بر S باشد، آنگاه



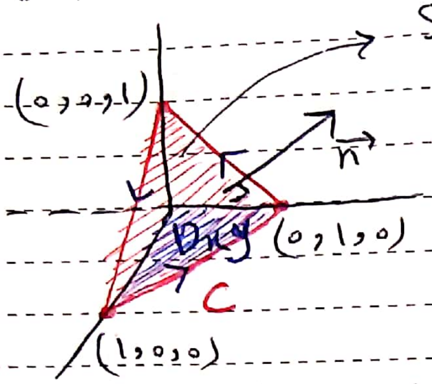
$$\int_C \underbrace{P\,dx + Q\,dy + R\,dz}_{\vec{F}\,dr} = \iint_S \text{carl}\,F \cdot n\, d\sigma$$

مثال) مطلوب است محاسبه انتگرال‌های زیر:

الف) $\int_C (x^2 - y^2)\,dx + (y^2 - z^2)\,dy + (z^2 - x^2)\,dz$

C خم حاصل از برخورد صفحه $x+y+z=1$ با صفحات مختصات در $\frac{1}{8}$ اول فضا. جهت حرکت بر روی C از نقطه $(0,0,1)$ به $(0,1,0)$ و به $(1,0,0)$.

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان



$S: x+y+z=1$

$S: g(x,y,z) = x+y+z=1$

$$\vec{\nabla} g = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow n = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\text{curl}F = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2-y^2 & y^2-z^2 & z^2-x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2z\\2x\\2y\end{pmatrix}$$

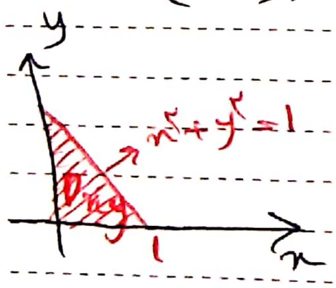
$$\text{curl}\vec{F}\cdot\vec{n} = \frac{2}{\sqrt{3}}(z+x+y)$$

طبق قضیه استوکس

$$\Longrightarrow \int_C (x^2-y^2)dx + (y^2-z^2)dy + (z^2-x^2)dz$$

$$= \iint_S \text{curl}F\cdot n\, d\sigma = \iint_S \frac{2}{\sqrt{3}}(z+x+y)\, d\sigma$$

$$S: \begin{cases} z = 1-x-y \\ (x,y)\in D_{xy} \end{cases} \Longrightarrow \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$



$$= \iint_{D_{xy}} \frac{2}{\sqrt{3}}(1-x-y+x+y)\times\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dx\,dy$$

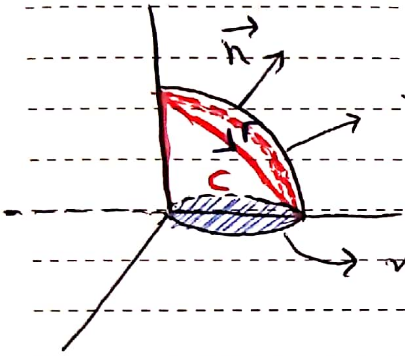
$$= \iint_{D_{xy}} 2\,dx\,dy = 2\iint_{D_{xy}} dx\,dy = 2\int_0^1\int_0^{1-x} dy\,dx$$

$$= 2\int_0^1 (1-x)\,dx = 2\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^1 = 1$$

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

ب) $\int_C F \cdot dr$ که در آن $F = \begin{pmatrix} xz \\ 3yz + x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ ، C خم حاصل از تلاقی نیم کره $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ و استوانه $x^2 + y^2 = 2y$ و جهت حرکت بر روی C با توجه به نرمال خارجی کره در جهت مثبت.



$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ یا $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$S: g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$\Rightarrow \nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \Rightarrow n = \frac{\nabla g}{\|\nabla g\|} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$

$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

$\text{carl}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz & 3yz + x^2 & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 2x \end{pmatrix}$

$\text{carl}\,\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} (-xy + xy + 2zx)$

طبق قضیه استوکس:

$\int_C F \cdot dr = \iint_S \text{carl}\,F \cdot n \, d\sigma$

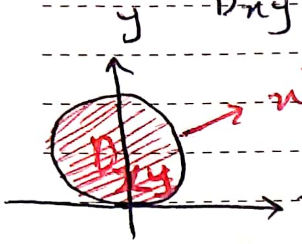
$= \iint_S \frac{2zx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} d\sigma = \iint_{D_{xy}} \frac{2\sqrt{4-x^2-y^2}\,x}{2} \times \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}} dx dy$

$\begin{cases} S: z = \sqrt{4-x^2-y^2} \\ (x,y) \in D_{xy} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4-x^2-y^2} + \frac{y^2}{4-x^2-y^2}}$

$= \frac{2}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$

@jozve_iut
@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$= \iint_{D_{xy}} 2x\,dx\,dy$ در سیستم قطبی $D_{xy} = \begin{cases} 0 \le r \le 2\sin\theta \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

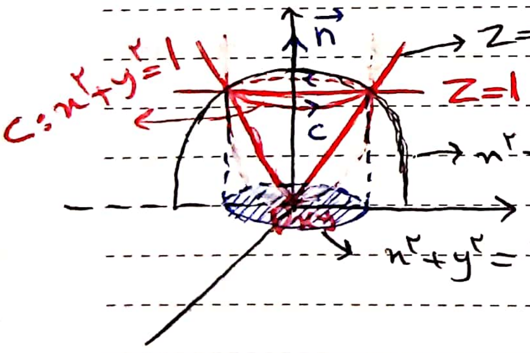


$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} 2r^2\cos\theta\,dr\,d\theta$

$= \int_0^{\pi}\left(2\frac{r^3}{3}\cos\theta\Big]_0^{2\sin\theta}\right)d\theta = \int_0^{\pi}\frac{16}{3}\sin^3\theta\cos\theta\,d\theta$

$= \frac{16}{3}\,\frac{(\sin\theta)^4}{4}\Big]_0^{\pi} = 0$

مثال) $\int_C \overbrace{(x^3+y^3)}^{P}dx + \overbrace{(y^3+z^3)}^{Q}dy + \underbrace{(z^3+x^3)}_{R}dx$ ، C خم حاصل از تلاقی کره $x^2+y^2+z^2=2$ با مخروط $z=\sqrt{x^2+y^2}$ جهت حرکت بر روی C با توجه به جهت مثبت محور Z (جهت مثبت)



محل برخورد دو رویه: $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} & (1) \\ x^2+y^2+z^2=2 & (2) \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2=1 \Rightarrow z=1$

طبق قضیه استوکس

$\int_C Pdx+Qdy+Rdz = \iint_S \text{curl}F\cdot n\,d\sigma$

$S: g(x,y,z)=z=1 \Rightarrow \vec n = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\text{curl}\vec F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^3+y^3 & y^3+z^3 & z^3+x^3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}-3z^2\\-3x^2\\-3y^2\end{pmatrix} \Rightarrow \text{curl}F\cdot n = -3y^2$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$\Rightarrow \iint_S \text{curl} F \cdot n \, d\sigma = \iint_S -3y^2 \, d\sigma \quad d\sigma \to \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\, dx\, dy$$

$$S: \begin{cases} z=1 \\ (x,y) \in D_{xy} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} = 1$$

$$= \iint_{D_{xy}} -3y^2 \times 1 \, dx\, dy = \int_0^{2\pi}\int_0^1 -3r^3 \sin^2\theta \, dr\, d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta\right)\left(-3\int_0^1 r^3 dr\right) = \frac{-3\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2\theta}{2} = \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4}\Big]_0^{2\pi} = \pi$$

@jozve_iut

تعریف: فرض کنیم $D \subseteq \mathbb{R}^3$، میدان برداری $F = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ تعریف شده بر ناحیه D را یک میدان گرادیان بر D گوییم، هرگاه تابع مشتق‌پذیر $f: D \to \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که

$$F = \nabla f \quad \text{یا} \quad \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix}$$

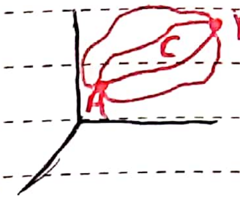
در این حالت f را تابع پتانسیل F می‌نامیم.

تذکر: فرض کنیم F یک میدان گرادیان پیوسته بر ناحیه D با تابع پتانسیل f باشد. همچنین فرض کنیم $C \subseteq D$ خم هموار به معادله برداری $r(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$ ، $t \in [a,b]$ از نقطه A (نظیر $t=a$)

کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان | @jozve_iut

به نقطه B (تغییر $t=b$) باشد. در این صورت برای تابع $g:[a,b]\to\mathbb{R}$

با ضابطه $g(t)=f(x(t),y(t),z(t))$



$$\Rightarrow g'(t)=\underset{\nabla f}{F}(x(t),y(t),z(t))\cdot r'(t)$$

$$\Rightarrow \int_C F\cdot dr = \int_a^b F(x(t),y(t),z(t))\cdot r'(t)\,dt$$

$$= \int_a^b g'(t)\,dt = g(t)\Big]_a^b = g(b)-g(a) = f(B)-f(A)$$

به خصوص اگر C خم بسته باشد (یعنی $B=A$) آنگاه

@jozve_iut

$$\oint_C F\cdot dr = 0$$

مثال) نشان دهید میدان $F(x,y)=(2x+\ln y)\hat{i}+(\frac{x}{y}+1)\hat{j}$ بر ناحیه $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y>0\}$ یک میدان گرادیان است و با استفاده از این مطلب، مطلوب است محاسبه‌ی $\int_C F\cdot dr$ که در آن C قسمتی از خم $x(t)=\frac{2t}{1+t^4}$ و $y(t)=\frac{4}{1+t^2}$ از نقطه $A(0,4)$ به نقطه $B(1,2)$ است.

حل) برای اینکه $F=\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}$ یک میدان گرادیان باشد، باید تابع مشتق‌پذیر f وجود داشته باشد که

$$\nabla f = F \Rightarrow \begin{pmatrix}f_x\\f_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}$$

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

$$\Longrightarrow \begin{cases} f_x = P \\ f_y = Q \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f_x = 2x + \operatorname{Ln} y & (1) \\ f_y = \dfrac{x}{y} + 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Longrightarrow f_x = 2x + \operatorname{Ln} y \Longrightarrow f(x,y) = \int (2x + \operatorname{Ln} y)\,dx$$

$$= x^2 + (\operatorname{Ln} y)\,x + C(y) \quad (3)$$

از طرفی:

طبق رابطه (۳) : $f_y = \dfrac{x}{y} + \dfrac{\partial}{\partial y} C(y)$

طبق رابطه (۲) : $f_y = \dfrac{x}{y} + 1$

$$\Longrightarrow \frac{x}{y} + \frac{\partial}{\partial y} C(y) = \frac{x}{y} + 1$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial}{\partial y} C(y) = 1 \Longrightarrow C(y) = \int 1\,dy = y + C$$

طبق (۳) : $f(x,y) = x^2 + (\operatorname{Ln} y)\,x + y + C \Longrightarrow \nabla f = F$

$$\Longrightarrow \int_C F \cdot dr = f(B) - f(A) = f(1,2) - f(0,4)$$

$$= 3 + \operatorname{Ln} 2 - 4 = \boxed{\operatorname{Ln} 2 - 1}$$

@jozve_iut

@jozve_iut | کانال مرجع جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

جزوات دانشگاه صنعتی اصفهان

@jove_iut

www.jozve-iut.ir